Лекция 4. Метрические пространства и их свойства

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

21 сентября 2011 г.

Определение метрического пространства

Определение 1. *Множество* Y *называется метрическим пространством, если на нем задана вещественная функция* $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ *такая, что выполнены следующие свойства*:

(i) $d(x, y) = 0$, *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.

Пример

Рассмотрим полностью один нетривиальный пример. Пусть l^p при $p > 1$ линейное пространство последовательностей комплексных чисел вида

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty}, \quad x_k \in \mathbb{C}$$

таких, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty.$$

Введем метрику на этом линейном пространстве как

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}. \quad (1)$$

Доказательство неравенства треугольника

Докажем, что функция $d(x, y)$ является метрикой на линейном пространстве l^p при $p > 1$. Действительно, первые два свойства очевидны и в доказательстве нуждается только неравенство треугольника. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1.

Шаг 1. Докажем, что для всех $x \geqslant 1$ и $\alpha \in (0, 1)$ имеет место следующее неравенство:

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ в окрестности точки $x = 1$. По формуле Лагранжа имеем

$$x^\alpha - 1^\alpha = \alpha z^{\alpha - 1}(x - 1), \quad z \in (1, x)$$

Отсюда сразу же получаем следующее неравенство:

$$x^\alpha - 1^\alpha \leqslant \alpha(x - 1) \quad \text{при} \quad x \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Шаг 2. Арифметическое неравенство Гельдера.

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и для определенности $a \geqslant b$. Тогда в неравенстве (2) положим

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - \frac{1}{p}\frac{a}{b} \leqslant 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

Умножим обе части этого неравенства на b и получим неравенство

$$a^{1/p}b^{1-1/p} - \frac{a}{p} \leqslant \frac{b}{q} \Rightarrow a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Шаг 3. Неравенство Гельдера

Пусть сначала $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — это последовательности неотрицательных чисел. Пусть

$$a = \frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}, \quad b = \frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Тогда из полученного нами арифметического неравенства Гельдера приходим к неравенству

$$\frac{x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Шаг 3. Неравенство Гельдера

Теперь просуммируем по $i = \overline{1, n}$ и получим неравенство

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Таким образом, приходим к неравенству Гельдера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}.$$

Шаг 4. Неравенство Минковского.

Итак, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{(p-1)/p}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}\right], \quad (3)$$

Значит,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}.$$

Неравенство Минковского в комплексном случае.

Пусть $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ это комплексные последовательности, тогда по доказанному получаем следующее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Наконец, осталось воспользоваться очевидным неравенством

$$|x_i+y_i| \leqslant |x_i|+|y_i|.$$

Теперь осталось перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить неравенство Минковского для линейного пространства l^p при $p>1$. Случай $p=1$ рассматривается очевидным образом.

Определение 2. Открытый шар $O(a, r)$ и замкнутый шар $K(a, r)$ метрического пространства (X, d) :

$$O(a, r) \equiv \{x \in X : \ d(x, a) < r\} \quad K(a, r) \equiv \{x \in X : \ d(x, a) \leqslant r\}\,.$$

Определение 3. Открытое множество — множество, содержащее вместе с каждой точкой некоторый открытый шар. Замкнутое множество — дополнение открытого.

Определение 4. Внутренняя точка множества — содержится во множестве вместе с некоторым открытым шаром. Внешняя точка — содержится вместе с некоторым открытым шаром в дополнении множества.

Предельные и изолированные точки. Определения.

Определение 5. Изолированная точка — существует открытый шар с центром в этой точке, непересекающийся с этой точкой.
Определение 6. Предельная точка — любой открытый шар с центром в этой точке содержит точку этого множества, отличную от данной.
Определение 7. Окрестностью точки метрического пространства называется любое множество, содержащее данную точку вместе с некоторым открытым шаром.
Определение 8. Открытой окрестностью точки называется произвольное открытое множество, содержащее данную точку.

Лемма о топологии.

Лемма

(i) *Объединение любого числа открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество;*

(ii) *Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множества;*

(iii) *Само пространство X и $\emptyset$ — открыто–замкнутые множества.*

Доказательство леммы о топологии.

Итак, пусть $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ — произвольное семейство открытых множеств и пусть

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha,$$

тогда найдется такое $\alpha_0 \in A$ и такой открытый шар $O(x, r)$ что

$$x \in O(x, r) \subset \Sigma_{\alpha_0} \in \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha.$$

Следовательно, объединение произвольного числа открытых множеств — открытое множество.

Доказательство леммы о топологии.

Пусть теперь

$$\Sigma \equiv \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k - \quad \text{пересечение конечного числа открытых множеств.}$$

Пусть $x \in \Sigma$, тогда найдутся такие открытые шары $O(x, r_k)$, что

$$x \in O(x, r_k) \subset \Sigma_k.$$

Определим теперь $r = \min\{r_k,\ k = \overline{1, n}\}$, тогда, очевидно, что

$$x \in O(x, r) \subset \Sigma.$$

Доказательство леммы о топологии.

Второе утверждение леммы о топологии вытекает из первого переходом к дополнениям. Действительно, пусть

$\{S_\alpha : \ \alpha \in A\} -$ произвольное семейство замкнутых множеств.

Тогда имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \backslash \Sigma_\alpha) = X \backslash \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha \right),$$

где мы ввели обозначение

$$S_\alpha = X \backslash \Sigma_\alpha.$$

С другой стороны, имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = \bigcup_{k=1}^{n} (X \backslash \Sigma_k) = X \backslash \left(\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k \right), \quad S_k = X \backslash \Sigma_k.$$

Отсюда приходим к утверждению.

Замыкание множества.

Определение 9. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A, называется замыканием множества и обозначается как $\overline{A}$.

Справедливы следующие свойства замыкания множества, которые мы без доказательств собрали в одной лемме.

Лемма

(i) $A \subset \overline{A}$, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$;

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(iii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$;

(vi) *вообще говоря,* $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Связные метрические пространства.

Ясно, что всякое подмножество Y метрического пространства (X, d) является метрическим пространством (Y, d). Мы ранее выяснили, что в метрическом пространстве (X, d) открыто–замкнутыми множествами заведомо являются само множество X и $\emptyset$. Однако, существуют такие метрические пространства, у которых есть и другие открыто–замкнутые множества. Дадим определение.

Определение 10. Метрическое пространство (X, d) является связным, если нет других открыто–замкнутых множеств кроме X и $\emptyset$.

Пример. Пусть A и B — это два непересекающихся подмножества множества X. Тогда $(A \cup B, d)$ — это несвязное метрическое пространство.

Плотные и не плотные множества. Определения.

Определение 11. Множество A метрического пространства (X, d) называется плотным во множестве B этого же пространства, если $B \subset \overline{A}$.
Определение 12. Множество A называется всюду плотным в метрическом пространстве (X, d), если $\overline{A} = X$.
Определение 13. Множество A называется нигде не плотным в метрическом пространстве, если всякое открытое множество метрического пространства (X, d) содержит другое открытое множество целиком свободное от точек множества A.
Определение 14. Метрическое пространство (X, d) называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Пример сепарабельного пространства.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Это пространство является сепарабельным, поскольку в силу известной теоремы Стоуна любую непрерывную функцию можно приблизить полиномом с рациональными коэффициентами

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_k \in \mathbb{Q}.$$

Пример несепарабельного пространства.

Введем в рассмотрение следующее метрическое пространство. Рассмотрим всевозможные последовательности вещественных чисел $\{x_k\}$, для которых

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty.$$

Введем на этом пространстве следующую метрику:

$$d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|.$$

Это метрическое пространство обозначается как m. Докажем, что это пространство не является сепарабельным.

Доказательство несепарабельности.

С этой целью нам нужно предъявить такое подмножество E_0 множества m, которое нельзя приблизить с любой наперед заданной точностью элементами некоторого счетного множества нельзя. В качестве такого множества E_0 возьмем произвольные последовательности, состоящие из нулей и единиц:

$$\{x_k\}, \quad x_k = 0 \quad \text{либо} \quad x_k = 1.$$

Можно проверить, что мощность этого множества E_0 континуум. Кроме того, расстояния между различными точками этого множества равно 1. И, следовательно, приблизить каждую точку множества E_0 элементами некоторого счетного множества нельзя, поскольку шары радиуса $1/3$ с центрами в точках множества E_0 не пересекаются и имеют мощность континуум.

Определение 15. Множество метрического пространства называется совершенным, если оно замкнуто и состоит из предельных точек.

Предъявим алгоритм построения так называемого множества Кантора. Рассмотрим отрезок $I = [0, 1]$, который мы разделим на три равные части и выкинем из него интервал $(1/3, 2/3)$. Теперь оставшиеся отрезки также разделим на три равные части и из них также выкинем серединные интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ и т.д. В результате на $n-$ом шаге получим замкнутое множество I_n длиной 3^{-n}, причем выполнена цепочка вложений

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots.$$

Лемма о множестве Кантора.

Рассмотрим множество Кантора

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Лемма

Множество Кантора K является совершенным и нигде не плотным множеством.

Доказательство леммы. Совершенность множества.

Прежде всего заметим, что в силу леммы о топологии канторово множество замкнуто. Кроме того, докажем, что состоит из предельных точек. Действительно, пусть $x \in K$. Рассмотрим произвольную окрестность этой точки Σ_x, которое согласно определению содержит открытый интервал $\sigma_x \in \Sigma_x$ с центром в точке x. Пусть Λ_n — это тот отрезок из множества I_n, который содержит точку x. Заметим, что при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Lambda_n \in \sigma_x$. Пусть $a_n \in \Lambda_n$ — это тот конец отрезка Λ_n, который не совпадает с $x \neq a_n$. Следовательно, для произвольной окрестности Σ_x точки x нашлась точка $a_n \in K$ такая, что $x \neq a_n \in \Sigma_x$.
Таким образом, множество Кантора совершенно.

Доказательство леммы. Нигде не плотность.

Докажем, что множество Кантора K является нигде не плотным множеством на отрезке $[0, 1]$. Пусть Σ — это произвольное открытое множество на отрезке $[0, 1]$. Ясно, что если на этом множестве нет точек Канторова множества, то доказывать нечего. Пусть, однако, $x \in K \cap \Sigma$. Теперь возьмем тот отрезок Λ_m, который содержит точку x. Возьмем теперь интервал с центром в середине этого отрезка Λ_m и радиуса 2^{-m-1}. Этот интервал не принадлежит Канторову множеству. Таким образом, нигде не плотность доказана.

Непрерывность отображений метрических пространств. Определение по Коши.

Как вам известно из курса математического анализа существуют два определения непрерывности отображений метрических пространств. Дадим определение по Коши.

Определение 16. Отображение

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Коши в точке $x_0 \in X$, если для всякой окрестности $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ точки $g(x_0)$ найдется окрестность $\Sigma_{x_0} \subset X$ точки x_0, что

$$g(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$

Непрерывность отображений метрических пространств. Определение по Хайне.

Сначала дадим определение сходимости последовательности точек в метрическом пространстве.

Определение 17. Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства (X, d) называется сходящейся к точке $x_0 \in X$, если $d(x_n, x_0) \to +0$ при $n \to +\infty$.

Теперь дадим определение по Хайне.

Определение 18. Отображение

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Хайне в точке $x_0 \in X$, если для всякой сходящейся к точке x_0 последовательности $\{x_n\}$ соответствующая последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к точке $g(x_0)$ в метрическом пространстве (Y, ρ).

Вспомогательная лемма.

Без доказательства приведем следующую очевидную лемму.

Лемма

Точка a принадлежит замыканию $\overline{A}$ множества A метрического пространства (X, d), тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\} \subset A$, что

$$x_n \to a.$$

Теорема об открытом отображении.

Теорема

Отображение
$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$
является непрерывным, тогда и только тогда, когда полный прообраз $G \subset X$ *открытого множества* $\Sigma \subset Y$ *открыт в* X.

Доказательство теоремы об открытом отображении.

Пусть g — непрерывное отображение по Коши и пусть S открытое множество в (Y, ρ). Если полный прообраз множества S пуст, то он, очевидно, открытое множество. Пусть прообраз $S \neq \emptyset$. Для всякой точки

$$x_0 \in g^{-1}(S)$$

открытая окрестность $x_0 \in \Sigma_{x_0}$, что $g(\Sigma_{x_0}) \subset S$. Рассмотрим множество

$$g^{-1}(S) = \bigcup_{x_0 \in g^{-1}(S)} \Sigma_{x_0},$$

которое, очевидно, является открытым.

Доказательство теоремы об открытом отображении.

Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\Sigma_{g(x_0)}$ — это открытая окрестность точки $g(x_0)$. Тогда

$$g^{-1}(\Sigma_{g(x_0)})$$

это открытое множество метрического пространства (X, d), образ которого содержится в $\Sigma_{g(x_0)}$.

Эквивалентность определений по Коши и по Хайне.

Теорема

Определение по Коши эквивалентно определению по Хайне.

Отметим, что это достаточно сильное утверждение, поскольку в более общих топологических пространствах, которые мы скоро будем изучать из определения по Хайне, вообще говоря, не следует определение по Коши, хотя из определения по Коши всегда следует определение по Хайне.

Доказательство.

Пусть
$$g:(X,d)\to(Y,\rho)$$
есть непрерывное отображение по Коши. Докажем, что оно непрерывно по Хайне. Действительно, пусть
$$x_n\to x_0 \quad \text{в} \quad (X,d),$$
тогда для любой окрестности $\Sigma_{g(x_0)}\subset Y$ найдется такая окрестность $S_{x_0}\subset X$ точки x_0, что
$$g(S_{x_0})\subset\Sigma_{g(x_0)}.$$
Но $x_n\in S_{x_0}$ начиная с некоторого номера и поэтому
$$g(x_n)\subset g(S_{x_0})\subset\Sigma_{g(x_0)}.$$
Значит, последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к $g(x_0)$.

Доказательство.

Докажем теперь утверждение в обратную сторону. Итак, пусть Σ — это открытое множество метрического пространства (Y,ρ). Докажем, что его полный прообраз

$$G = \{x \in X : \ g(x) \in \Sigma\}$$

является открытым множеством. Пусть нет. Тогда найдется такая точка $x_0 \in G$, что $x_0 \in \overline{X \backslash G}$, Но тогда найдется такая последовательность $\{x_n\} \notin G$, что

$$x_n \to x_0 \quad \text{в} \quad (X,d).$$

Тогда $\{g(x_n)\} \notin \Sigma$, но при этом

$$g(x_n) \to g(x_0) \in \Sigma.$$

Это противоречит открытости множества Σ.

Компактность и локальная компактность.

Определение 19. Открытым покрытием множества A называется произвольное семейство $\{G_\alpha\}$ открытых множеств и такое, что

$$A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Определение 20. Метрическое пространство (X, d) называется компактным, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 21. Метрическое пространство (X, d) называется локально–компактным, если всякая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Центрированные множества.

Определение 22. Произвольное семейство множеств $\{F_\alpha\}$ называется центрированным, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.

Теорема

Для того чтобы метрическое пространство (X, d) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.

Доказательство теоремы.

Пусть (X, d) — компактно. А $\{F_\alpha\}$ — это произвольная центрированная система его замкнутых подмножеств. Тогда $G_\alpha = X \backslash F_\alpha$ — это семейство открытых множеств, причем никакая конечная подсистема этой системы не покрывает пространство X, поскольку в противном случае соответствующая конечная подсистема из $\{F_\alpha\}$ имела бы пустое пересечение, что противоречит центрированности. Поэтому система $\{G_\alpha\}$ не покрывает X в силу компактности X. Значит $\{G_\alpha\}$ не покрывает X и, следовательно,

$$\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset.$$

Доказательство теоремы.

Теперь мы докажем утверждение в обратную сторону.
Итак, пусть всякая центрированная его система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие множества X, тогда

$$F_\alpha = X \backslash G_\alpha$$

— это система замкнутых множеств, причем

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset,$$

так как $\{G_\alpha\}$ покрывает X. Следовательно, $\{F_\alpha\}$ не является центрированной. Значит, некоторая его конечная подсистема

$$\{F_k\}_{k=1}^N$$

имеет пустое пересечение. Таким образом,

$$\{G_k\}_{k=1}^N, \quad G_k = X \backslash F_k \quad \text{покрывает} \quad X.$$

Значит, X — компакт.

Некоторые свойства компактных пространств.

Лемма

(i) *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства является компактом;*

(ii) *Образ компактного пространства при непрерывном отображении — компактное пространство;*

(iii) *Компактное подмножество метрического пространства, рассматриваемое как метрическое пространство замкнуто.*

Топология метрических пространств.

Дадим определение базы топологии метрического пространства.

Определение 23. Базой топологии $\mathfrak{B}$ метрического пространства (X, d) называется такая система открытых множеств, что любое открытое множество Σ можно представить в виде

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha} B_\alpha, \quad B_\alpha \in \mathfrak{B}.$$

Лемма

Для того чтобы система открытых множеств $\mathfrak{B}$ было базой топологии метрического пространства (X, d), необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого множества G и его точки $a \in G$ нашлось такое множество $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что $a \in \Sigma_a \subset G$.

Доказательство леммы.

Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии. Тогда для любого открытого множества G и его точки $a \in G$ найдется такая, подсистема

$$\{\Sigma_\alpha\} \in \mathfrak{B},$$

что

$$G = \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0,\ a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset G.$$

Пусть теперь для всякого открытого множества G и его точки $a \in G$ найдется такое $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что

$$a \in \Sigma_a \subset G.$$

Но тогда

$$G = \bigcup_{a \in G} \Sigma_a.$$

Значит, $\mathfrak{B}$ — база топологии.

Определение 24. Метрическое пространство называется пространством со счетной базой, если существует хотя бы одна база топологии, состоящая из счетного числа множеств.

Лемма

Метрическое пространство является пространством со счетной базой, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т. е. если это метрическое пространство сепарабельно.

Определение 25. Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства (X, d) называется фундаментальной, если

$$d(x_n, x_m) \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Определение 26. Метрическое пространство является полным, если каждая его фундаментальная последовательность сходится.
В качестве примера, рассмотрим линейное метрическое пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Итак, пусть $\{f_n(x)\}$ — это фундаментальная последовательность относительно указанной метрики. Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant N$ имеет место неравенство

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к непрерывной функции. Теперь осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить полноту этого пространства.

Изометрия метрических пространств.

Рассмотрим линейное метрическое пространство $\mathbb{B}(\Omega)$ ограниченных функций относительно метрики

$$d(f,g) = \sup_{x\in\Omega} |f(x) - g(x)|.$$

Определение 27. Отображение

$$\mathrm{J} : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

двух метрических пространств называется изометрией, если

$$d_2(\mathrm{J}f, \mathrm{J}g) = d_1(f,g) \quad \text{для всех} \quad f, g \in X_1.$$

Лемма о изометрии метрических пространств.

Лемма

Пусть (X_1, d_1) *и* (X_2, d_2) *— это два полных метрических пространства и*

$$E_1 \overset{ds}{\subset} X_1, \quad E_2 \overset{ds}{\subset} X_2,$$

где между E_1 *и* E_2 *имеется изометрия* J, *причем* $\mathrm{J}E_1 = E_2$. *Тогда изометрия* J *продолжается единственным образом до изометрии между* (X_1, d_1) *и* (X_2, d_2).

Здесь и всюду далее мы обозначаем символом

$$E \overset{ds}{\subset} X$$

всюду плотное вложение.

Доказательство леммы-1.

Итак, пусть $x \in X_1 \backslash E_1$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, которая сходится к x. Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}x_n\}$ в силу полноты метрического пространства (X_2, d_2) и того, что

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), y) = d_1(x_n, x) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

при некотором $y \in X_2$. Обозначим через

$$\mathrm{J}(x) = y.$$

Проверим корректность определения $\mathrm{J}(x)$. Пусть существует другая последовательность $\{y_n\} \subset E_1$, которая сходится к x. Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}(y_n)\}$ тоже сходится к $\mathrm{J}(x)$, поскольку последовательность

$$x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$$

сходится к x.

Доказательство леммы-2.

Проверим, что так определенное продолжение изометрии J сохраняет расстояния. Действительно, пусть $x, y \in X_1$, тогда

$$d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) = \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)) = \lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, y_n) = d_1(x, y).$$

Действительно, это следствие следующих рассуждений:

$$d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(x_n)) + d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)) + d_2(\mathrm{J}(y_n), \mathrm{J}(y)).$$

Отсюда получаем, что

$$d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) \leqslant\leqslant \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)).$$

Кроме того, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(x)) + d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) + d_2(\mathrm{J}(y), \mathrm{J}(y_n)),$$

из которой сразу же получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)).$$

Доказательство леммы-3.

Значит,

$$d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) = \lim_{n \to +\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)).$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$d_1(x, y) = \lim_{n \to +\infty} d_1(x_n, y_n).$$

Наконец, докажем, что

$$\mathrm{J}(X_1) = X_2.$$

Действительно, для каждой точки $y \in X_2$ найдется такая последовательность $\{y_n\} \subset E_2$, что

$$d_2(y_n, y) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство леммы-4.

Это в свою очередь означает, что найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), y) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Но в силу изометрии J последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в (X_1, d_1) и значит сходится к $x \in X_1$. Стало быть, для каждого $y \in X_2$ найдется такое $x \in X_1$, что

$$\mathrm{J}(x) = y.$$

Отсюда следует единственность продолжения изометрии.

Лемма доказана.

Одна теорема об изометрии метрического пространства (X, d) и подмножества метрического пространства $\mathbb{B}(X)$.

Теорема

Всякое метрическое пространство (X, d) изометрично некоторой части метрического пространства $\mathbb{B}(X)$.

Доказательство теоремы-1.

Итак, пусть метрическое пространство (X, d) не пусто. Тогда найдется точка $x_0 \in X$. Определим функцию на метрическом пространстве (X, d) следующим образом:

$$f_x(y) = d(y, x) - d(x_0, y). \tag{4}$$

Отметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|d(y, x) - d(x_0, y)| \leqslant d(x, x_0) \tag{5}$$

☐ Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_0) + d(x_0, x), \quad d(y, x_0) \leqslant d(x_0, x) + d(x, y).$$

Из этих двух неравенств вытекает неравенство (5) ☒

Значит,

$$|f_x(y)| \leqslant d(x, x_0),$$

т. е. функция $f_x(y)$ для каждого фиксированного $x \in X$ принадлежит метрическому пространству $\mathbb{B}(X)$. Для фиксированных $x_1, x_2 \in X$ имеют место следующие цепочки выражений:

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leqslant d(x_1, x_2).$$

Отсюда получаем, что

$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| \leqslant d(x_1, x_2). \tag{6}$$

Докажем, что на самом деле в неравенстве (6) имеет место равенство. С этой целью достаточно указать такое $y \in X$, что имеет место равенство. Действительно, пусть $y = x_1$, тогда имеем

$$|f_{x_1}(x_1) - f_{x_2}(x_1)| = d(x_1, x_2).$$

Итак,

$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2).$$

Таким образом, установлена изометрия между всем метрическим пространством (X, d) и частью метрического пространства $\mathbb{B}(X)$.

Теорема доказана.

Пополнение метрических пространств.

Определение 28. Пополнением $\widetilde{X}$ метрического пространства X называется полное метрическое пространство, в котором X изометрично некоторому всюду плотному подмножеству в $\widetilde{X}$.

Теорема

Всякое метрическое пространство имеет единственное с точностью до изометрии пополнение.

Доказательство теоремы.

По доказанной ранее теоремы об изометрии метрическое пространство (X, d) изометрично некоторому подмножеству полного метрического пространства $\mathbb{B}(X)$ и пусть J — это изометрия, о которой идет речь. Тогда рассмотрим

$$\mathrm{J}X \subset \mathbb{B}(X).$$

Замыкание множества $\mathrm{J}(X)$ в полном метрическом пространстве $\mathbb{B}(X)$, очевидно, является полным метрическим пространством. Обозначим это замыкание через $\widetilde{\mathbb{B}}(X)$. Теперь в качестве пополнения метрического пространства (X, d) можно взять

$$(\widetilde{X}, d), \quad \text{где} \quad \widetilde{X} = \mathrm{J}^{-1}\widetilde{\mathbb{B}}(X),$$

(Привести диаграмму на доске).

Теорема доказана.

Теорема о вложенных шарах.

Теорема

Пусть (X, d) *— это полное метрическое пространство и* $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— семейство замкнутых шаров, причем* $B_{n+1} \subset B_n$ *и радиусы шаров стремятся к 0, тогда*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset.$$

Доказательство теоремы о вложенных шарах.

Действительно, возьмем последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n \in B_n$. Поскольку шары вложены и их радиусы стремятся к нулю, то эта последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Это следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что при $n, m > N$

$$a_n, a_m \in B_{\min\{n,m\}},$$

а радиус шара $B_{\min\{n,m\}}$ стремиться к нулю при $N \to +\infty$. Следовательно, в силу полноты (X, d) сходится к a, которая в силу замкнутости шаров B_n, принадлежит их пересечению.

Теорема доказана.

Теорема Бэра о категориях.

Теорема

Пусть (X,d) *— это полное метрическое пространство, которое представимо в виде*

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n, \quad X_n = \overline{X}_n,$$

тогда хотя бы одно множество X_{n_0} *содержит открытый шар положительного радиуса.*

Доказательство теоремы Бэра о категориях-1.

Если $X = X_1$, то доказывать нечего, поскольку тогда X_1 содержит все открытые шары. Пусть $X \neq X_1$, тогда $X \backslash X_1$ — открыто и тогда найдется такой непустой открытый шар $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X \backslash X_1$, причем

$$O(x_1, \varepsilon_1) \cap X_1 = \emptyset.$$

Если теперь $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X_2$, тогда утверждение доказано. Пусть нет. Тогда найдется открытый шар

$$O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1) \cap X \backslash X_2, \quad \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Понятно, что

$$O(x_2, \varepsilon_2) \cap (X_1 \cup X_2) = \emptyset.$$

Доказательство теоремы Бэра о категориях-2.

Таким образом, на n-ом шаге мы либо найдем непустой открытый шар $O(x_n, \varepsilon_n) \subset X_n$ либо получим цепочку вложенных открытых шаров

$$O(x_n, \varepsilon_n) \subset O(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset \cdots \subset O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1), \quad \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{4}.$$

При этом

$$d(x_n, x_{n+m}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leqslant \leqslant \frac{\varepsilon_n}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \right) < \frac{\varepsilon_n}{3}. \quad (7)$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной и сходящейся к некоторому элементу $x_0 \in X$ в силу полноты (X, d).

Доказательство теоремы Бэра о категориях-3.

Теперь перейдем к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (7) и получим, что

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon_n}{3} \Rightarrow x_0 \in O(x_n, \varepsilon_n) \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} X_n.$$

В пределе получим, что $x_0 \notin X$. Противоречие.

Теорема доказана.

Принцип равномерной ограниченности.

Теорема

Пусть (X, d) *— это полное метрическое пространство и непрерывные функции*

$$f_n(x) : (X, d) \to \mathbb{R}^1$$

таковы, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *ограничена для всякого фиксированного* $x \in X$*. Тогда найдется такой замкнутый шар* $K \subset X$ *положительного радиуса, что*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in K} |f_n(x)| < +\infty.$$

Доказательство.

Введем множества

$$X_N = \left\{ x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N \right\}.$$

В силу непрерывности $f_n(x)$ множества X_N замкнуты. А поскольку последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена, то

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_N.$$

Следовательно, в силу теоремы Бэра о категориях найдется такое $N_0 \in N$, что X_{N_0} содержит внутренние точки, а следовательно, некоторый замкнутый шар K. И, следовательно,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in K} |f_n(x)| < +\infty.$$