Лекция 6. Векторные топологические пространства и их свойства

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

3 октября 2011 г.

Линейные функционалы.

Напомним некоторые понятия линейной алгебры. Действительно, пусть $\mathfrak{L}$ — это линейное пространство над полем либо вещественных либо комплексных чисел.

Рассмотрим множество всех линейных функционалов над линейным пространством $\mathfrak{L}$. Ясно, что это множество, которое мы обозначим через

$$\mathfrak{L}^{\#},$$

также является линейным пространством над тем же полем. Введем в рассмотрение так называемые скобки двойственности. Именно,

$$\langle f, x\rangle : \mathfrak{L}^{\#} \otimes \mathfrak{L} \to \mathbb{C}^1 \quad \text{(или)} \quad \mathbb{R}^1.$$

Определение векторного топологического пространства (ВТП).

Итак, начнем со следующего определения.

Определение 1. *Векторное пространство* X *над полем комплексных чисел* $\mathbb{C}$, *на котором задана топология* τ, *называется векторным топологическим пространствам* (X, τ), *если операции сложения элементов и умножения на число являются непрерывными отображениями из* (X, τ) *в* (X, τ).

Непрерывность сложения и умножения.

Рассмотрим по подробнее это определение. Требует расшифровки непрерывность отображения

$$F_1(x,y) : (X,\tau)\otimes(X,\tau)\to(X,\tau), \tag{1}$$

задаваемое как $F_1(x,y) = x+y$, а также непрерывность отображения

$$F_2(\lambda,x) : \mathbb{C}^1\otimes(X,\tau)\to(X,\tau), \tag{2}$$

задаваемое как $F_2(\lambda,x) = \lambda\cdot x$.

Итак, непрерывность $F_1(x, y)$ означает, что для всякой окрестности V_{x+y} точки $x + y$ найдутся такие окрестности U_x и U_y, что $F_1(U_x, U_y) = U_x + U_y \subset V_{x+y}$.

Непрерывность отображения $F_2(\lambda, x)$ означает, что для любой окрестности точки $V_{\lambda x}$ найдутся такие окрестности $U_\lambda = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\}$ и U_x точек λ и x соответственно, что $F_2(U_\lambda, U_x) = \mu U_x \subset V_{\lambda \cdot x}$ при всех $\mu \in U_\lambda$.

Некоторые определения.

Определение 1. *Выпуклым множеством* E *в векторном пространстве* X *называется такое множество, что для всех пар точек* $x, y \in E$ *и для всякого* $\lambda \in [0, 1]$ *имеем* $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$.

Определение 2. *Множество* E *в векторном пространстве* X *называется уравновешенным, если для всякого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *с* $|\lambda| \leqslant 1$ *имеем* $\lambda E \subset E$.

Определение 3. *Множество* E *в векторном топологическом пространстве* (X, τ) *называется ограниченным, если для всякой окрестности нуля* U_θ *найдется такое* $s > 0$, *что* $E \subset tU_\theta$ *при* $t > s$.

Определение 4. *Множество E в векторном топологическом пространстве (X, τ) называется поглощающим, если для всякой точки $x \in X$ найдется такое $t = t(x) > 0$, что $x \in t \cdot E$.*

Определение 5. *Выпуклое и уравновешенное множество E векторного топологического пространства (X, τ) называется абсолютно выпуклым.*

Сопряженные к ВТП.

Определение 6. *Множество всех линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством* (X, τ) *называется сопряженным пространством и обозначается как* X^*.

Напомним, что это означает. Действительно, пусть $f \in X^\#$, тогда его непрерывность в точке $x \in X$ определяется следующим образом: *для всякой окрестности* $U(f(x)) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - f(x)| < \varepsilon\}$ *найдется такая окрестность* $U(x)$ *точки* $x \in X$, *что имеет место вложение* $f(U(x)) \subset U(f(x))$. *При этом линейный функционал* $f(x)$ *должен быть непрерывен в каждой точке векторного топологического пространства* (X, τ).

Полунормы.

Топологию векторного топологического пространства (X, τ) можно задавать различными способами, но нас будет интересовать один частный, но важный случай, когда топология задается при помощи *полунорм.*

Прежде всего дадим определение полунормы.

Определение 7. *Вещественная функция* $p(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$, *определенная на векторном пространстве* X *называется полунормой*, *если выполнены следующие два свойства*:

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и всех* $x \in X$;

(ii) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* $x, y \in X$.

Пример полунормы. Функционал Минковского.

Рассмотрим следующую вещественную функцию на линейном пространстве $\mathbb{C}^{(1)}([0,1])$:

$$p(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f^{'}(x)|.$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет всем условиям полунормы. Однако, из условия, что $p(f) = 0$ вытекает всего лишь на всего, что $f(x) = constant$.

Определение 8. *Функционалом Минковского $p_{\mathrm{A}}(x)$ абсолютно выпуклого и поглощающего множества $\mathrm{A} \subset X$ векторного топологического пространства (X, τ) называется следующая функция*:

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf \left\{\lambda \in \mathbb{R}^1_+ : x \in \lambda \cdot \mathrm{A}\right\}. \tag{3}$$

Функционал Минковского — полунорма. Свойство (i).

Докажем свойство (i). Действительно, пусть $\alpha > 0$, тогда имеют место следующие соотношения

$$p_{\mathrm{A}}(\alpha x) = \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A}\} =$$
$$= \alpha \inf\left\{\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} = \alpha \inf\left\{\overline{\lambda} : \ \overline{\lambda} > 0, \ x \in \overline{\lambda} \mathrm{A}\right\} =$$
$$= \alpha p_{\mathrm{A}}(x).$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 0$. Действительно, в этом случае справедливы аналогичные соотношения в силу уравновешенности множества A

$$p_{\mathrm{A}}(\alpha x) = \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A}\} =$$
$$= -\alpha \inf\left\{-\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ -x \in -\alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} =$$
$$= -\alpha \inf\left\{-\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in -\alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} =$$
$$= -\alpha \inf\left\{\overline{\lambda} : \ \overline{\lambda} > 0, \ x \in \overline{\lambda} \mathrm{A}\right\} = -\alpha p_{\mathrm{A}}(x).$$

Случай $\alpha = 0$ очевиден.

Функционал Минковского — полунорма. Свойство (ii)-1.

Докажем теперь справедливость свойства (ii). Действительно, имеет место следующие рассуждения. Пусть $x, y \in \mathrm{X}$, тогда выберем числа a и b следующим образом:

$$p_{\mathrm{A}}(x) < a < p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon, \quad p_{\mathrm{A}}(y) < b < p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{x}{a}, \; \frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

Действительно, по определению чисел a, b имеем

$$1 > p_{\mathrm{A}}\left(\frac{x}{a}\right) = \inf\left\{\lambda : \; \lambda > 0, \frac{x}{a} \in \lambda\mathrm{A}\right\},$$

значит при некотором $\lambda \in (0, 1)$ имеет место вложение

$$\frac{x}{a} \in \lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$$

в силу уравновешенностью множества A.

Функционал Минковского — полунорма. Свойство (ii)-2.

Аналогично доказывается, что

$$\frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

Но множество A выпуклое поэтому оно вместе с точками

$$\frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \frac{y}{b}$$

содержит и отрезок их соединяющий, т.е., в частности, точку

$$\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} \in \mathrm{A}. \tag{5}$$

Значит, в силу определения функционала Минковского имеем

$$p_{\mathrm{A}}(x+y) = \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x+y \in \lambda\mathrm{A}\right\},$$

откуда и из (5) получаем, что $\lambda \leqslant a+b$. Стало быть, отсюда и из (4) имеем неравенство

$$p_{\mathrm{A}}(x+y) \leqslant a+b = p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon + p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon.$$

Связь функционала Минковского и абсолютно выпуклых поглощающих множеств ВТП.

Теорема

Пусть $p(x)$ *— это полунорма на векторном топологическом пространстве* (X, τ), *тогда следующие множества являются абсолютно выпуклыми и поглощающими*:

$$\mathrm{A} \equiv \{x \in \mathrm{X} : \; p(x) < \alpha\} \quad \textit{и} \quad \mathrm{B} \equiv \{x \in \mathrm{X} : \; p(x) \leqslant \alpha\}\,.$$

Обратно, пусть $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ *— это абсолютно выпуклое и поглощающее множество, тогда* **функционал Минковского** *этого множества, т. е.*

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf \{\lambda : \; \lambda > 0, \; x \in \lambda \mathrm{A}\} - \quad \textit{полунорма.}$$

$$\{x : \; p_{\mathrm{A}}(x) < 1\} \subset \mathrm{A} \subset \{x : \; p_{\mathrm{A}}(x) \leqslant 1\}\,.$$

Доказательство теоремы-1.

Докажем первую часть теоремы. Действительно, рассмотрим, например, множество A. Проверим его выпуклость: пусть $x, y \in \mathrm{A}$, тогда в силу свойства (i) имеет место следующее неравенство:

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha.$$

Уравновешенность этого множества следует из свойства (ii). Действительно, имеем

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leqslant p(x) < \alpha.$$

Таким образом, приходим к выводу, что A абсолютно выпуклое множество. Докажем теперь, что это множество является поглощающим. Действительно, пусть $y \in \mathrm{X}$. Введем обозначение

$$\lambda(y) \equiv \frac{p(y)}{\alpha},$$

Доказательство теоремы-2.

тогда получим, что для всех $\lambda > \lambda(y)$ имеют место неравенства

$$p(y) < \lambda\alpha, \quad p\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \alpha,$$

значит,

$$\frac{y}{\lambda} \in \mathrm{A} \Rightarrow y \in \lambda\mathrm{A}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для множества B.
Осталось доказать последнее утверждение теоремы.
Действительно, пусть

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda\mathrm{A}\right\} < 1,$$

значит, $x \in \lambda\mathrm{A}$ при некотором $\lambda \in (0, 1)$, тогда из уравновешенности множества A получаем

$$x \in \lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{A}.$$

Стало быть, первое вложение доказано.

Доказательство теоремы-3.

Пусть теперь $x \in \mathrm{A}$. Тогда имеем $x \in \lambda\mathrm{A}$ при некотором $\lambda \in (0, 1]$. Значит,

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf \{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda\mathrm{A}\} \leqslant 1.$$

Теорема доказана.

В связи с этим введем новое понятие *локально выпуклого пространства*. Дадим определение.

Определение 9. *Векторное топологическое пространство* (X, τ) *называется локально выпуклым, если его базис окрестностей нуля* $\mathfrak{B}_\theta$ *может быть выбран, состоящим из выпуклых множеств.*

Важным свойством локально выпуклого векторного топологического пространства есть то, что базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\theta$ может быть выбран состоящим из абсолютно выпуклых и поглощающих множеств!!!

Локально выпуклые пространства. Построение с помощью полунорм-1.

$$V(p,n) = \left\{ x : \ p(x) < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{при} \quad p \in \mathrm{P}(X) \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (6)$$

Действительно, $\theta \in V(p,n)$, поскольку $p(\theta) = 0$. Базис топологии окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\theta$ определим как всевозможные **конечные** пересечения

$$\bigcap_{p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_m\},\ n \in \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}} V(p,n)$$

Заметим, что построенные окрестности нуля $V(p,n)$ являются *выпуклыми множествами*, т. е.

$$tV(p,n) + (1-t)V(p,n) \subset V(p,n) \quad \text{при} \quad t \in [0,1].$$

Локально выпуклые пространства. Построение с помощью полунорм-2.

Действительно, в силу свойств (i)–(ii) полунормы имеет место неравенство

$$p(tx+(1-t)y) \leqslant tp(x)+(1-t)p(y) < \frac{t}{n}+\frac{1-t}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall\, x, y \in V(p, n).$$

Кроме того, окрестности $V(p, n)$ являются *уравновешенными множествами*, т. е. $\alpha V(p, n) \subset V(p, n)$ при $|\alpha| \leqslant 1$. Это также следствие свойства (ii) полунормы. Действительно, имеем при $0 < |\alpha| \leqslant 1$

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < \frac{|\alpha|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{для всех} \quad x \in V(p, n).$$

Теорема о непрерывности полунорм.

Теорема

Полунорма $p(x)$, определенная на векторном топологическом пространстве X, непрерывна в топологии τ тогда и только тогда, когда она непрерывна в нуле. Функционал Минковского $p_U(x)$ абсолютно выпуклого, поглощающего множества $U \in X$ является непрерывным в топологии τ тогда и только тогда, когда U — окрестность нуля.

Доказательство теоремы-1.

Докажем первую часть теоремы. Пусть $p(x)$ непрерывна в нуле векторного топологического пространства (X, τ), тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $U_\varepsilon \in \tau$, что $\theta \in U_\varepsilon$ и имеет место неравенство

$$p(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon \backslash \{\theta\}.$$

В силу неравенства треугольника (ii) в определении полунормы для произвольного $a \in \mathrm{X}$ имеем неравенство

$$|p(x) - p(a)| \leqslant p(x - a).$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ взяв указанное U_ε, получим неравенство

$$|p(x) - p(a)| \leqslant p(x - a) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in a + U_\varepsilon \backslash \{\theta\},$$

т. е. $p(x)$ непрерывна в произвольной точке $a \in X$.

Доказательство теоремы-2.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Пусть $U \in X$ — абсолютно выпуклая, поглощающая окрестность нуля. Рассмотрим соответствующий функционал Минковского

$$p_U(x) \equiv \inf \{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda U\}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ при $x \in \varepsilon U \equiv U_\varepsilon$ имеем $\lambda \leqslant \varepsilon$ и, значит,

$$p_U(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon \backslash \{\theta\},$$

т. е. функционал Минковского $p_U(x)$ непрерывен в нуле и из предыдущего утверждения — на всем X.

Доказательство теоремы-3.

Докажем обратное утверждение. Действительно, пусть функционал Минковского абсолютно выпуклого, поглощающего множества $U \in \mathrm{X}$ непрерывен в нуле, тогда множество

$$V \equiv \{x : \ p_U(x) < 1\}$$

открыто (т. е. принадлежит τ) как прообраз открытого множества $(0, 1)$ и содержит $\theta \in \mathrm{X}$, и содержится во множестве U. Значит, U — окрестность нуля.

Теорема доказана.

Одно утверждение.

Имеет место следующее важное утверждение, вытекающее из этой теоремы и которое мы приведем без доказательств.

Лемма

Пусть $p(x)$ *— это полунорма, определенная на векторном топологическом пространстве* (X, τ), *тогда если множество* $\mathrm{A}_p \equiv \{x : \ p(x) < 1\}$ *содержит открытое множество* $\Theta \in \tau$ *либо множество* $\mathrm{B}_p \equiv \{x : \ p(x) \leqslant 1\}$ *содержит открытое множество* $\Theta \in \tau$, *то* $p(x)$ *непрерывна в топологии* τ.

Непрерывность полунорм в локально выпуклых пространствах.

Теорема

Полунорма $p(x)$, определенная на векторном топологическом пространстве (X, τ), непрерывна в топологии τ, порожденной счетным семейством полунорм P, тогда и только тогда, когда найдутся такие конечное семейство полунорм $p_i(x)$ из P при $i = \overline{1, n}$ и постоянная $\beta > 0$, что имеет место следующее неравенство:

$$p(x) \leqslant \beta \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x). \tag{7}$$

Доказательство теоремы-1.

Докажем сначала достаточность условия (7). Пусть для полунормы $p(x)$ выполнено неравенство (7) при некотором конечном семействе полунорм $\{p_i(x)\} \subset \mathrm{P}$. Поскольку топология τ порождена счетным семейством полунорм P, то множества

$$\{x: \ p_i(x) < 1\} \in \tau \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n},$$

т. е. открыты, значит, в силу леммы 1 полунормы $p_i(x)$ непрерывны в топологии τ. Из неравенства (7) вытекает непрерывность полунормы $p(x)$ в нуле и, следовательно, — на всем пространстве X.

Доказательство теоремы-2.

Докажем теперь необходимость условия (7). Пусть $p(x)$ непрерывна в нуле пространства X. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$ и конечный набор полунорм $\{p_i(x)\} \subset \mathrm{P}$, что для всех x из X, удовлетворяющих условию

$$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) \leqslant \delta$$

выполняется неравенство

$$p(x) \leqslant \varepsilon.$$

Выберем теперь число $\lambda > 0$ таким образом, чтобы

$$\lambda \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) \leqslant \delta,$$

тогда

$$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(\lambda x) \leqslant \delta.$$

Доказательство теоремы-3.

Следовательно, имеет место неравенство

$$p(\lambda x) \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Выберем теперь постоянную λ как

$$\lambda = \frac{\delta}{\max\limits_{i=\overline{1,n}} p_i(x)}.$$

Тогда из неравенства (8) вытекает неравенство

$$p(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x).$$

Теорема доказана.

База топологии ВТП.

Теорема

Базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\theta$ *(напоминаем, что это базис, построенный с помощью полунорм) на векторном пространстве* X *порождает локально выпуклое векторное топологическое пространство* (X, τ) .

Доказательство теоремы.

Действительно, топология τ порождается единственным образом как все возможные сдвиги базы окрестностей нуля:

$$\left\{x + V \,\middle|\, V \in \mathfrak{B}_\theta\right\}.$$

Именно, будем считать, что $U \in \tau$, если U можно представить в виде объединения сдвигов некоторых множеств из $\mathfrak{B}_\theta$.
Очевидно, что так определенная топология τ инвариантна относительно сдвигов.
Можно доказать непрерывность сложения векторов и непрерывность умножения числа на вектор относительно введенной топологии.
Построенная топология является локально выпуклой в силу утверждения теоремы 1.

Теорема доказана.

Рецепт построения локально выпуклого ВТП.

Таким образом, мы нашли рецепт построения из линейного пространства X локально выпуклого векторного топологического пространства, который мы и будем использовать при построении пространств *основных функций*. Заметим, что векторное топологическое пространство при нашем его определении не является автоматически хаусдорфовым. Поэтому в дальнейшем мы будем строить только хаусдорфовы топологии. Заметим теперь, что, как мы уже говорили, из условия $p(x) = 0$ вовсе не вытекает, что $x = \theta$, однако есть одно свойство системы полунорм P, которое роднит семейство полунорм с нормой. Именно, относительно системы полунорм P мы будем требовать, чтобы она была *разделяющей*, т. е. для всякой точки $x \in X$ существует такая полунорма $p \in \mathrm{P}$, что $p(x) \neq 0$.

Теорема о метризации.

Теорема

Пусть $\mathrm{P}(X)$ *— есть счетное и разделяющее семейство полунорм, тогда построенное по этой системе полунорм локально выпуклое векторное топологическое пространство является метризуемым пространством.*

Доказательство теоремы.

Предположим теперь, что наше семейство полунорм $\mathrm{P}(X)$ счетно и разделяющее. Тогда на построенном топологическом пространстве (X, τ) можно ввести метрику

$$d(x,y) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}. \tag{9}$$

Проверим, что это метрика на (X, τ). Действительно, в силу того, что семейство полунорм является разделяющим, то $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$, поскольку, если $d(x,y)=0$, но $x-y\neq\theta$, то найдется такой номер $k=n_0$, что $d_{n_0}(x-y)>0$, а значит, $d(x,y)>0$. Противоречие.

Теорема доказана.

Определение 10. *Полное, метризуемое и локально выпуклое пространство называется пространством Фреше.*

Замечание 2. Как видно из теоремы 5 — она не гарантирует того, что построенное по данной системе полунорм метрическое пространство является автоматически полным, т. е. пространством Фреше. Действительно, это не так и полноту построенного пространства надо проверять «вручную».

Итак, пусть $f \in X^{\#}$, а $x \in X$, причем X — это векторное пространство. Теперь рассмотрим следующую функцию на $x \in X$:

$$p(x) = |\langle f, x \rangle| \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{при} \quad f \in X^{\#}. \tag{10}$$

Докажем, что функция $p(x)$ — это полунорма. Действительно, имеют место следующие очевидные неравенства:

$$\begin{aligned} p(x_1 + x_2) = |\langle f, x_1 + x_2 \rangle| = |\langle f, x_1 \rangle + \langle f, x_2 \rangle| \leqslant \\ \leqslant |\langle f, x_1 \rangle| + |\langle f, x_2 \rangle| = p(x_1) + p(x_2), \end{aligned} \tag{11}$$

$$p(\lambda x) = |\langle f, \lambda x \rangle| = |\lambda \langle f, x \rangle| \leqslant |\lambda|\,|\langle f, x \rangle| = |\lambda| p(x). \tag{12}$$

Основные типы топологий. Слабая топология-2.

Таким образом, в силу (11) и (12) функция (10) является полунормой. Пока у нас нет топологии в векторном пространстве $X^{\#}$, поэтому мы не можем сказать, что такое ограниченное множество в $X^{\#}$. Мы можем говорить только о конечных множествах из $X^{\#}$, т. е. о множествах, состоящих из конечного числа элементов из $X^{\#}$. Таким образом, будем рассматривать произвольные конечные множества $A_n = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset X^{\#}$. Тогда семейство

$$\mathrm{P} \equiv \left\{p(x; A_n); A_n \subset X^{\#}\right\}, \qquad (13)$$

где

$$p(x; A_n) = \sup_{f \in A_n} |\langle f, x \rangle| .$$

Основные типы топологий. Слабая топология-3.

Это семейство согласно теореме 4 порождает топологию τ_w на векторном пространстве X, которая называется *слабой топологией.* Заметим теперь, что выражение, которое стоит в левой части равенства (10) можно рассматривать как функцию от аргумента $f \in X^{\#}$ при фиксированном $x \in X$. Но тогда эта функция тоже полунорма, но уже на линейном пространстве $X^{\#}$.

Теперь введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#} \equiv \{p(f;B_n); B_n \subset X\}\,, \tag{14}$$

где

$$p(f;B_n) = \sup_{x\in B_n} |\langle f, x\rangle|\,, \quad B_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X.$$

Это семейство согласно теореме 4 порождает топологию $\tau^*_{w^*}$, но уже на сопряженном векторном пространстве $X^{\#}$. Эта топология носит название $*-$*слабой топологии.*

Возникает вопрос: почему мы в данном случае говорим не о слабой топологии, а о $*-$слабой топологии? А вот почему — потому что на векторном пространстве $X^{\#}$ может быть еще задана и слабая топология следующим образом. Поскольку множество $X^{\#}$ является векторным пространством, то на нем в свою очередь однозначно определено векторное пространство $X^{\#\#}$ линейных функционалов, но уже над $X^{\#}$. Определим соответствующие скобки двойственности между $X^{\#}$ и $X^{\#\#}$ следующим образом:

$$\left\langle x^{\#}, f \right\rangle_{\#} : X^{\#\#} \otimes X^{\#} \to \mathbb{C}. \tag{15}$$

Но тогда рассмотрим топологию на $X^{\#}$ при помощи следующего семейства полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#\#} \equiv \left\{ p^{\#}(f; A_n^{\#}); A_n^{\#} \subset X^{\#\#} \right\}, \qquad (16)$$

где

$$p^{\#}(f; A_n^{\#}) = \sup_{x^{\#} \in A_n^{\#}} \left| \langle x^{\#}, f \rangle_{\#} \right|,$$

где $A_n^{\#}$ — это произвольное конечное подмножество из $X^{\#\#}$. Порожденная согласно теореме 3 топология τ_w^* является по своему смыслу слабой топологией на $X^{\#}$ и эти две топологии τ_w^* и $\tau_{w^*}^*$ вообще говоря не совпадают.

Основные типы топологий. Сравнение топологий-3.

Рассмотрим вопрос о том, когда эти две топологии являются эквивалентными. Заметим, что имеет место множественное вложение $X \subset X^{\#\#}$. Действительно, это следствие того, что каждый элемент $x \in X$ порождает линейный функционал на $X^{\#}$ по формуле

$$\langle f, x \rangle.$$

Поэтому и имеет место указанное вложение, но обратное вложение — $X^{\#\#} \subset X$ имеет место не всегда. Однако тот случай, когда все-таки такое вложение имеет место, а значит $X = X^{\#\#}$, очень важен. В этом случае линейное пространство X называется *рефлексивным*.

И в этом случае имеет место равенство скобок двойственности

$$\langle f, x\rangle = \langle x^{\#}, f\rangle_{\#},$$

причем каждому элементу $x \in X$ взаимно однозначно соответствует элемент $x^{\#} \in X^{\#\#}$. Поэтому из сравнения формул (17) и (16) мы приходим к выводу о том, что топологии τ_w и τ_w^* совпадают на $X^{\#}$ и, значит, понятия слабой топологии и $*-$слабой топологии — это одно и тоже. В общем случае, как нетрудно убедиться, топология τ_w^* состоит из большего числа множеств, чем топология τ_{w*}^* и, значит, топология τ_w^* *сильнее* топологии τ_{w*}^* на $X^{\#}$.

Основные типы топологий. Сильная топология-1.

Теперь мы займемся введением *сильной топологии* на пространстве X^* — линейном пространстве линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X, τ). Заметим, что для введения сильной топологии на X^* нам нужно понятие ограниченного множества в X и поэтому, естественно, нужна какая-то топология на векторном пространстве X.

Основные типы топологий. Сильная топология-2.

Пусть $B \subset X$ — это произвольное ограниченное множество (см. определение 3) в векторном топологическом пространстве (X, τ). Поскольку всякое конечное множество, в частности, точка поглощается всякой окрестностью нуля, то конечное множество — это пример ограниченного множества, однако, естественно, существуют ограниченные множества, не сводящиеся к конечным. Теперь введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}_s^{\#} \equiv \{p(f; B); B \subset X\}, \tag{17}$$

где

$$p(f; B) = \sup_{x \in B} |\langle f, x \rangle|, \quad B \subset X,$$

где B — это произвольное ограниченное множество в (X, τ).

Тогда топология порожденная этой системой множеств согласно теореме 4, называется *сильной топологией* пространства X^* и обозначается как τ_s^*. Ясно, что поскольку всякое конечное множество — это ограниченное множество, то слабая топология τ_w^* и уж тем более $*-$слабая топология пространства X^* *слабее* топологии τ_s^*. Таким образом, сильная топология τ_s является *сильнейшей* топологией на сопряженном пространстве X^* среди указанных «топологизаций». Полученное локально выпуклое векторное топологическое пространство обозначается как (X_s^*, τ_s^*). Локально выпуклое векторное топологическое пространство, порожденное $*-$слабой топологией, обозначается как $(X_{w^*}^*, \tau_{w^*}^*)$.

Определение 11. *Векторное топологическое пространство* (X, τ) *называется нормируемым, если на нем можно ввести такую норму, что топология нормы и исходная топология* τ *являются эквивалентными.*

Теорема о нормируемости. *Локально выпуклое пространство, содержащее ограниченную и компактную окрестность нуля, является банаховым относительно функционала Минковского этой окрестности с топологией, эквивалентной исходной.*

Доказательство теоремы-1.

Приведем доказательство только первой части этого утверждения.

Пусть V — есть выпуклая ограниченная окрестность нуля в локально выпуклом векторном топологическом пространстве (X, τ). Тогда как известно найдется открытая в топологии τ абсолютно выпуклая, окрестность нуля $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, которая, естественно, тоже ограничена. Тогда это пространство можно представить в виде

$$X = \bigcup_{\alpha>0} \alpha \mathrm{U}.$$

Доказательство теоремы-2.

Рассмотрим функционал Минковского множества U :

$$p_{\mathrm{U}} \equiv \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda \mathrm{U}\right\}.$$

Поскольку U есть выпуклое, поглощающее и уравновешенное множество (как окрестность нуля), то по теореме 1 функционал Минковского этого множества является полунормой на этом пространстве. Пусть $x \neq \theta$ и $x \notin \lambda_0 \mathrm{U}$ при $\lambda_0 > 0$ то для всех $\lambda \leqslant \lambda_0$ в силу ограниченности U имеем $x \notin \lambda \mathrm{U} \subset \lambda_0 \mathrm{U}$. Тогда по определению функционала Минковского имеем

$$p_{\mathrm{U}}(x) \geqslant \lambda_0 > 0.$$

Доказательство теоремы-3.

Таким образом, $p_{\mathrm{U}}(x)$ есть норма на (X, τ). Осталось доказать, что $p_{\mathrm{U}}(x)$ порождает ту же топологию на X, что и исходная топология τ. Это есть следствие ранее установленного нами равенства множеств

$$\alpha \mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} : \ p_{\mathrm{U}}(x) < \alpha\} .$$

Теорема доказана.

Определение 12. *Локально выпуклое пространство* (X, τ) *называется борнологическим или пространством Макки, если каждое абсолютно выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества является окрестностью нуля.*

Борнологическое пространство обладает целым набором интересных свойств, доказательство которых выходит за рамки целей настоящего курса лекций.

Борнологические пространства. Свойства.

Теорема

Для того чтобы локально выпуклое пространство (X, τ) *было борнологическим, необходимо и достаточно, чтобы каждая полунорма* $p(x)$ *на* (X, τ), *ограниченная на каждом ограниченном множестве, была непрерывной.*

Теорема

Локально выпуклое метризуемое пространство (X, τ) *является борнологическим.*

Борнологические пространства. Свойства.

Теперь мы приведем самый важный в приложениях результат. Пусть $\mathbb{T}$ — это линейное отображение борнологического пространства (X, τ) в борнологическое пространство (Y, σ).

Теорема

Для того чтобы оператор $\mathbb{T}$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы из условия $x_n \to \theta$ в (X, τ) вытекало, что $\mathbb{T}x_n \to \theta$ в (Y, σ).

Строгие индуктивные пределы и полнота. Понятие.

В дальнейшем мы будем рассматривать следующую общую ситуацию — имеется счетное семейство локально выпуклых векторных топологических пространств (X_n, τ_n) таких, что

$$(X_n, \tau_n) \subset (X_{n+1}, \tau_{n+1})$$

и топология τ_{n+1} порождает на X_n исходную топологию τ_n. Оказывается, что индуктивная топология τ на

$$X \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n,$$

порожденная семейством (X_n, τ_n) относительно операторов канонического вложения

$$g_n : X_n \to X,$$

порождает на каждом (X_n, τ_n) исходную топологию τ_n.

Определение 13. *Фундаментальной направленностью или направленностью Коши называется такая направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, что для всякой окрестности нуля U найдется такое $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, что для всех таких $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$, для которых $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$ и $\alpha_0 \leqslant \alpha_2$ имеет место выражение*

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in U.$$

Определение 14. *Векторное топологическое пространство (X, τ) называется полным, если всякая фундаментальная направленность сходится.*

Строгие индуктивные пределы и полнота. Свойства.

Теорема

Справедливы следующие свойства строгих индуктивных пределов:

(i) *Строгий индуктивный предел полных локально выпуклых пространств полон;*

(ii) *Пусть (X, τ) есть строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств (X_n, τ_n). Множество $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$ ограничено в (X, τ) тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором (X_n, τ_n) и ограничено в нем.*

(iii) *Пусть (X, τ) есть строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств (X_n, τ_n), причем (X_n, τ_n) замкнуто в $(\mathrm{X}_{n+1}, \tau_{n+1})$. Тогда (X, τ) не метризуемо.*

(iv) *Строгий индуктивный предел (X, τ) борнологических пространств есть борнологическое пространство.*

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Постановка вопроса.

Пусть, к примеру, (X, τ) и (Y, σ) — это локально выпуклые пространства с сильными сопряженными (X_s^*, τ_s^*) и (Y_s^*, σ_s^*). Предположим, что имеет место следующее топологическое вложение:

$$(X, \tau) \subset (Y, \sigma) .$$

При каких дополнительных условиях на эти пространства имеет место следующее обратное вложение сильных сопряженных:

$$(Y_s^*, \sigma_s^*) \subset (X_s^*, \tau_s^*)?$$

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Постановка вопроса.

Итак, пусть (X, τ) и (Y, σ) — это локально выпуклые пространства с сильными сопряженными (X^*_s, τ^*_s) и (Y^*_s, σ^*_s). Пусть

$$\langle x^*, x \rangle_x \quad \text{и} \quad \langle y^*, y \rangle_y$$

— это скобки двойственностей между (X, τ) и (X^*_s, τ^*_s), и (Y, σ) и (Y^*_s, σ^*_s), соответственно. Пусть, кроме того, имеется линейный оператор $\mathbb{T}$, действующий из (X, τ) в (Y, σ):

$$\mathbb{T} : (X, \tau) \to (Y, \sigma) \,.$$

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Транспонированный оператор.

Напомним, определение транспонированного оператора $\mathbb{T}^t$:

$$\mathbb{T}^t : (\mathrm{Y}_s^*, \sigma_s^*) \to (\mathrm{X}_s^*, \tau_s^*) \, ,$$

т. е.

$$\left\langle \mathbb{T}^t y^*, x \right\rangle_x \equiv \langle y^*, \mathbb{T}x \rangle_y \, , \tag{18}$$

для всех $y^* \in (Y^*, \sigma_s^*)$ и для всех $x \in (X, \tau)$.

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Теорема.

Теорема

Пусть (X, τ) *и* (Y, σ) *— это два локально выпуклых пространства и*

$$\mathbb{T} : (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$$

— это линейный непрерывный оператор. Тогда имеют место следующие утверждения

(i) $\mathbb{T}(X) \overset{ds}{\subset} Y \Leftrightarrow \mathbb{T}^t$ *— является инъективным;*

(ii) $\mathbb{T}^t(Y_s^*) \overset{ds}{\subset} X_s^* \Rightarrow \mathbb{T}$ *— является инъективным.*

Теперь достаточно применить общий результат теоремы 11 к важному частному случаю оператора инъективного и непрерывного вложения

$$\mathbb{J}_{xy} : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$$

и транспонированного оператора

$$\mathbb{J}_{xy}^{t} : (Y_s^*, \sigma_s^*) \to (X_s^*, \tau_s^*) \, .$$

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Теорема.

И, тем самым, получить следующий весьма полезный результат в приложениях к изучению слабых решений краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных.

Теорема

Пусть (X, τ) *и* (Y, σ) *— это два локально выпуклых пространства и* $(X, \tau) \subset (Y, \sigma)$. *Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $(X, \tau) \overset{ds}{\subset} (Y, \sigma) \Leftrightarrow \mathbb{J}^t_{ef}$ *является инъективным;*

(ii) $(Y^*_s, \sigma^*_s) \overset{ds}{\subset} (X^*_s, \tau^*_s) \Rightarrow \mathbb{J}_{ef}$ *является инъективным.*

Следствие. *Для локально выпуклого пространства* (X, τ) *из условия* $(X, \tau) \overset{ds}{\subset} (Y, \sigma)$ *вытекает свойство* $(Y_s^*, \sigma_s^*) \overset{ds}{\subset} (X_s^*, \tau_s^*)$. *И, таким образом, имеют место равенства скобок двойственности*

$$\langle f, x\rangle_x = \langle f, x\rangle_y \quad \text{для всех} \quad x \in X, \quad f \in Y_s^*.$$