

# Лекция 7. Банаховы пространства

Корпусов Максим Олегович,  
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

11 января 2012 г.

**Определение 1.** Банаховым пространством  $\mathbb{B}$  называется нормированное пространство, которое является полным как метрическое пространство относительно метрики

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — это норма данного нормированного пространства.

Вопрос: является ли всякое нормированное пространство линейным пространством?

## Примеры.

Прежде всего пространством Лебега  $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$  при  $p \in [1, +\infty)$  является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Пространство  $l^p$  при  $p \in [1, +\infty)$  является банаховым относительно нормы

$$\|\{x\}\|_p = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

# Эквивалентные нормы на банаховом пространстве.

**Определение 2.** Норма  $\|\cdot\|_1$  на банаховом пространстве  $\mathbb{B}$ ,  $\|\cdot\|$  называется эквивалентной исходной, если найдутся такие положительные числа  $c_1$  и  $c_2$ , что имеет место неравенство

$$c_1\|f\| \leq \|f\|_1 \leq c_2\|f\| \quad \text{для всех } f \in \mathbb{B}.$$

Очевидно, что  $c_1 \leq c_2$ .

Заметим, что при этом соответствующее линейное нормированное пространство  $\mathbb{B}$  будет тоже банаховым относительно эквивалентной нормы  $\|\cdot\|_1$ .

## Пример.

Рассмотрим банахово пространство  $\mathbb{C}[0, 1]$  относительно стандартной нормы

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Теперь рассмотрим новую норму

$$\|f\|_1 = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Докажем, что это эквивалентная норма.

□ Имеет место цепочка неравенств

$$\|f\| \leq \|f\|_1 \leq 2\|f\|.$$

Стало быть, нормированное относительно нормы  $\|\cdot\|_1$  линейное пространство  $\mathbb{C}[0, 1]$  является также банаховым.

## Неэквивалентные нормы. Пример.

Рассмотрим линейное пространство  $\mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$ , на котором введем следующую норму:

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

Относительно этой нормы линейное пространство  $\mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$  является банаховым.

Рассмотрим на этом же линейном пространстве другую норму

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Относительно, этой нормы рассматриваемое линейное пространство не является банаховым. Если применить процедуру пополнения, то его пополнением окажется банахово пространство  $\mathbb{C}[0, 1]$ .

# Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах.

Пусть  $(\mathbb{N}_1, \|\cdot\|_1)$  и  $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$  — это два нормированных пространства, причем

$$A : \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_2$$

это линейный непрерывный оператор. Все такие операторы образуют линейное пространство (с очевидными операциями сложения и умножения на число), которое мы обозначим через

$$\mathcal{L}(N_1, N_2).$$

Введем норму на  $\mathcal{L}(N_1, N_2)$  следующим образом:

$$\|A\| \equiv \sup_{x \neq \theta, x \in \mathbb{N}_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Проверим, что это норма — на доске!

# Эквивалентное определение нормы линейного оператора.

Заметим, что в силу свойств нормы имеет место следующая цепочка равенств:

$$\|A\| \equiv \sup_{x \neq \theta, x \in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x \neq \theta, x \in N_1} \left\| A \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \sup_{\|y\|_1=1} \|Ay\|_2.$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях линейное нормированное пространство  $\mathcal{L}(N_1, N_2)$  является банаховым относительно введенной операторной нормы?

## Теорема

*Пусть  $(N_2, \|\cdot\|_2)$  является банаховым пространством, тогда  $\mathcal{L}(N_1, N_2)$  банахово.*



## Доказательство теоремы-1.

Пусть  $\{A_n\}$  — это фундаментальная по операторной норме последовательность операторов, т. е.

$$\|A_n - A_m\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n, m \rightarrow +\infty.$$

Докажем, что существует

$$A \in \mathcal{L}(N_1, N_2),$$

такой что

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Для всякого  $x \in \mathbb{N}_1$  последовательность  $\{A_n x\}$  фундаментальна в банаховом пространстве  $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ .

Действительно,

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \leq \|A_n - A_m\| \|x\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n, m \rightarrow +\infty.$$

## Доказательство теоремы-2.

В силу полноты  $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$  имеем

$$A_n x \rightarrow y \quad \text{в} \quad (\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2).$$

Введем оператор

$$Ax = y.$$

Докажем его линейность.

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2$$

причем

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \rightarrow A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

и

$$A_n x_1 \rightarrow Ax_1 \quad \text{и} \quad A_n x_2 \rightarrow Ax_2.$$

Значит,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2.$$

## Доказательство теоремы-3.

Докажем теперь ограниченность оператора  $A$ .

$$\left| \|A_n\| - \|A_m\| \right| \leq \|A_n - A_m\|.$$

Итак, из фундаментальности  $\{A_n\}$  вытекает фундаментальность  $\{\|A_n\|\}$ . Значит,

$$\|A_n\| \rightarrow c_1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Итак,

$$\|Ax\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n x\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\| \|x\|_1 = c_1 \|x\|_1.$$

Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2 \leq c_1.$$

## Доказательство теоремы-4.

Нам осталось доказать, что

$$\|A - A_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Действительно,

$$\|(A - A_n)x\|_2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|(A_m - A_n)x\|_2 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|A_m - A_n\|.$$

Следовательно,

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|(A - A_n)x\|_2 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|A_m - A_n\|,$$

а в силу фундаментальности  $\{A_n\}$  правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при больших  $n$ .

Теорема доказана.

# Линейные функционалы.

Прежде всего будем называть сходимость по норме

$$\|x - x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty$$

*сильной сходимостью.*

Рассмотрим частный, но очень важный случай линейных операторов — линейные функционалы:

$$f : (\mathbb{B}, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{C},$$

причем

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для всех  $x_1, x_2 \in \mathbb{B}$  и  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ .

# Сопряженное пространство.

Прежде всего вместо обозначения действия линейного функционала  $f(\cdot)$  на элементе  $x \in \mathbb{B}$  будем обозначать как

$$\langle f, x \rangle \quad \text{вместо} \quad f(x).$$

Очевидно, что множество линейных функционалов — само линейное пространство.

**Определение 3.** Множество всех линейных функционалов над банаховым пространством  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$  непрерывных в том смысле, что

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty$$

для всех

$$x_n \rightarrow x \quad \text{сильно в} \quad (\mathbb{B}, \|\cdot\|),$$

будем обозначать через  $\mathbb{B}^*$ .

# Норма на сопряженном пространстве.

Поскольку линейные функционалы — это линейные операторы, действующие из  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$  в  $\mathbb{C}$ , а

$\mathbb{C}$  полное банахово пространство!,

то в силу доказанной теоремы пространство  $\mathbb{B}^*$  является банаховым относительно следующей операторной нормы:

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x \rangle| \quad \text{для всех } f \in \mathbb{B}^*.$$

Заметим, что сходимость последовательности  $\{f_n\}$  по этой норме

$$\|f - f_n\|_* \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty$$

является в наших обозначениях СИЛЬНОЙ сходимостью!!!

## Слабая и \*-слабая сходимость.

Если есть сильная сходимость в банаховом пространстве  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ , то должна существовать и слабая сходимость.

**Определение 4.** Слабой сходимостью последовательности  $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$  называется сходимость числовой последовательности

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \text{для каждого фиксированного } f \in \mathbb{B}^*.$$

Более того, на  $\mathbb{B}^*$  можно ввести еще одну сходимость — \*-слабую сходимость.

**Определение 5.** \*-Слабой сходимостью последовательности  $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$  называется сходимость следующей числовой последовательности

$$\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \text{для каждого фиксированного } x \in \mathbb{B}.$$



Сильную сходимость мы будем обозначать как

$$x_n \rightarrow x.$$

Слабую сходимость будем обозначать как

$$x_n \rightharpoonup x.$$

\*—Слабую сходимость будем обозначать как

$$f_n \xrightarrow{*} f.$$

## Примеры. Пространства Лебега.

Теперь мы проиллюстрируем введенные в этой лекции новые понятия на примере пространств Лебега. Дадим определения сильной, слабой и  $*$ -слабой сходимостей для пространств  $L^p(\Omega)$ , где  $\Omega$  область евклидова пространства  $\mathbb{R}^N$ , а  $p \in [1, +\infty]$ .

## Сильная сходимость и слабая сходимость.

**Определение 6.** Последовательность  $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$  называется сильно сходящейся к элементу  $u \in L^p(\Omega)$  при  $p \in [1, +\infty]$ , если имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_p = 0.$$

**Определение 7.** Последовательность  $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$  называется слабо сходящейся к элементу  $u \in L^p(\Omega)$  при  $p \in [1, +\infty)$ , если имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f, u_n \rangle_p = \langle f, u \rangle_p \quad \text{для всех } f \in (L^p(\Omega))^*,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — это скобки двойственности между банаховыми пространствами  $L^p(\Omega)$  и  $(L^p(\Omega))^*$  при  $p \in [1, +\infty)$ .

## \*— Слабая сходимость.

**Определение 8.** Последовательность  $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$  называется \*—слабо сходящейся к функции  $f \in L^\infty(\Omega)$ , если для всех  $u \in L^1(\Omega)$  имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_n \langle f_n, u \rangle_\infty = \langle f, u \rangle_\infty \quad \text{для всех } u \in L^1(\Omega),$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$  — это скобки двойственности между банаховыми пространствами  $L^\infty(\Omega)$  и  $L^1(\Omega)$ .

### Теорема

Банахово пространство  $(L^p(\Omega))^*$  при  $p \in (1, +\infty)$  совпадает с банаховым пространством  $L^q(\Omega)$  при  $q = p/(p - 1)$ , а в случае  $p = 1$  банахово пространство  $(L^1(\Omega))^*$  совпадает с пространством  $L^\infty(\Omega)$ .

## Дважды сопряженные пространства.

Итак, мы ранее построили сопряженное банахово пространство  $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ . Рассмотрим теперь линейное пространство всех линейных функционалов над этим банаховым пространством.

$$\langle x^{**}, f \rangle_* \quad \text{для всех} \quad x^{**} \in (\mathbb{B}^*)^*, \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

**Определение 9.** Линейное пространство всех линейных функционалов  $x^{**}$  над банаховым пространством  $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$  непрерывных в том смысле, что

$$\langle x^{**}, f_n \rangle_* \rightarrow \langle x^{**}, f \rangle_*$$

как только

$$\|f_n - f\|_* \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

будем называть дважды сопряженным и обозначать как  $\mathbb{B}^{**}$ .

# Норма дважды сопряженного пространства.

Поскольку каждый элемент  $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$  — это линейный и непрерывный оператор, действующий как

$$x^{**} : (\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*) \rightarrow \mathbb{C},$$

то как и ранее приходим к выводу, что  $\mathbb{B}^{**}$  является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x^{**}\|_{**} \equiv \sup_{\|f\|_*=1} |\langle x^{**}, f \rangle_*|.$$

Сходимость последовательности  $\{x_n^{**}\} \subset \mathbb{B}^{**}$  по введенной норме

$$\|x_n^{**} - x^{**}\|_{**} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty$$

в наших обозначениях является сильной сходимостью.

Разумеется, что после того как мы ввели в рассмотрение банахово пространство  $(\mathbb{B}^{**}, \|\cdot\|_{**})$  мы можем ввести на банаховом пространстве  $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$  обычную слабую сходимость.

**Определение 10.** Сходимость числовой последовательности

$$\langle x^{**}, f_n \rangle_* \rightarrow \langle x^{**}, f \rangle \quad \text{для каждого } x^{**} \in \mathbb{B}^{**}.$$

будем называть слабой сходимостью

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

# Слабая и \*—слабая сходимости на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ .

Таким образом, мы построили три типа сходимостей на банаховом пространстве

$$(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*),$$

которое является сопряженным к исходному банахову пространству

$$(\mathbb{B}, \|\cdot\|).$$

Вопрос как они связаны.

Сильная сходимость влечет за собой слабую, а слабая сходимость влечет за собой \*—слабую.



Заметим, что по построению любой элемент  $x \in \mathbb{B}$  порождает линейный непрерывный функционал над банаховым пространством  $\mathbb{B}^*$  согласно формуле

$$\langle x, f \rangle : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{C}.$$

Значит, имеет место вложение

$$J : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^{**},$$

причем можно доказать, что соответствующий оператор вложения  $J$  является изометрией, а именно имеет место равенство

$$\|x^{**}\|_{**} = \|x\| \quad \text{при} \quad x^{**} = Jx.$$

В том случае, когда оператор  $J$  является сюръекцией, то банахово пространство  $\mathbb{B}$  называется рефлексивным.

## Связь слабой и $*$ -слабой сходимости.

Заметим, что если банахово пространство  $\mathbb{B}$  является рефлексивным, то имеет место равенство скобок двойственностей

$$\langle x^{**}, f \rangle_* = \langle f, x \rangle,$$

где

$$x^{**} \in \mathbb{B}^{**}, \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad x \in \mathbb{B},$$

причем

$$x^{**} = Jx.$$

И поэтому для рефлексивных банаховых пространств  $\mathbb{B}$  слабая и  $*$ -слабая сходимости на банаховом пространстве  $\mathbb{B}^*$  совпадают. Хотя в общем случае, как мы уже говорили, слабая сходимость «сильнее»  $*$ -слабой сходимости.

# Один интересный результат.

## Теорема

*Если  $\mathbb{B}$  — это рефлексивное нормированное пространство, то оно является банаховым.*

Доказательство на доске.

# Теорема Хана–Банаха.

## Теорема

Пусть  $X$  — это вещественное векторное пространство, а  $X_0 \subset X$  — векторное подпространство, на котором задан линейный функционал  $\langle \lambda, x \rangle$ , причем имеет место неравенство

$$\langle \lambda, x \rangle \leq p(x) \quad \text{для всех } x \in X_0,$$

где

$$p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) \quad \text{для всех } x, y \in X, \quad t \in [0, 1],$$

$$p(tx) = tp(x) \quad \text{для всех } x \in X, \quad t > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал  $\langle \Lambda, x \rangle$ , определенный на  $X$  и имеют место свойства

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{на } X_0,$$

# Доказательство теоремы Хана–Банаха-1.

Итак, пусть

$$\{x_0\} \in X \setminus X_0 \neq \emptyset,$$

поскольку в случае  $X = X_0$  доказывать нечего. Пусть  $x, y \in X_0$ . Тогда

$$\langle \lambda, x + y \rangle = \langle \lambda, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle \leq p(x + y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0).$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle.$$

Правая часть не зависит от  $x$ , а левая — от  $y$ , поэтому найдется такая постоянная  $a = a(x_0)$ , что имеет место неравенство

$$\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \leq a \leq p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle,$$

из которого получим

$$\langle \lambda, x \rangle - a \leq p(x - x_0), \quad \langle \lambda, y \rangle + a \leq p(y + x_0). \quad (1)$$

## Доказательство теоремы Хана–Банаха-2.

Пусть

$$X_1 = X_0 \oplus tx_0 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}^1.$$

Определим на  $X_1$  функционал

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \lambda, x \rangle + ta, \quad x \in X_0.$$

Линейность функционала  $\Lambda$  очевидна. Докажем, что он удовлетворяет следующему неравенству:

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle \leq p(x + tx_0) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}^1.$$

С этой целью воспользуемся неравенствами (1).

## Доказательство теоремы Хана–Банаха-3.

Пусть  $t > 0$ , тогда

$$\begin{aligned}\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle &= \langle \lambda, x \rangle + ta = \\ &= t \left( \left\langle \lambda, \frac{x}{t} \right\rangle + a \right) \leq tp \left( \frac{x}{t} + x_0 \right) = p(x + tx_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \Lambda, x - tx_0 \rangle &= \langle \lambda, x \rangle - ta = \\ &= t \left( \left\langle \lambda, \frac{x}{t} \right\rangle - a \right) \leq tp \left( \frac{x}{t} - x_0 \right) = p(x - tx_0).\end{aligned}$$

Таким образом, требуемое продолжение линейного функционала  $\lambda$  получено.

Далее нужно воспользоваться леммой Цорна и получить требуемый результат.

Теорема доказана.

## Теорема

Пусть  $X$  — комплексно-линейное пространство, а  $X_0 \subset X$  — его подпространство. Пусть для линейного функционала  $\langle \lambda, x \rangle$ , определенного на  $X_0$ , выполнено неравенство

$$|\langle \lambda, x \rangle| \leq p(x) \quad \text{для всех } x \in X_0,$$

где  $p(x)$  — полунорма, определенная на  $X$ . Тогда существует такой линейный функционал  $\langle \Lambda, x \rangle$ , что

$$|\langle \Lambda, x \rangle| \leq p(x) \quad \text{для всех } x \in X$$

и

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{для } x \in X_0.$$



# Доказательство комплексного варианта теоремы Хана–Банаха-1.

Рассмотрим вещественный функционал

$$\operatorname{Re}\langle \lambda, x \rangle.$$

Пусть

$$\operatorname{Re}\langle \Lambda, x \rangle$$

— это его расширение, полученное согласно уже доказанной теореме Хана–Банаха. Положим по определению

$$\langle \Lambda, x \rangle = \operatorname{Re}\langle \Lambda, x \rangle - i \operatorname{Re}\langle \Lambda, ix \rangle$$

□ Эта формула получается так.

$$l(x) = \operatorname{Re}\langle \Lambda, x \rangle, \quad l(ix) = \operatorname{Re}\langle \Lambda, ix \rangle = \operatorname{Re}(i\langle \Lambda, x \rangle) = -\operatorname{Im}\langle \Lambda, x \rangle.$$

Значит,

$$\langle \Lambda, x \rangle = l(x) - il(ix). \quad \square$$

Это и есть искомое расширение.

# Доказательство комплексного варианта теоремы Хана–Банаха-2.

Проверим неравенство, что

$$|\langle \Lambda, x \rangle| \leq p(x).$$

Действительно,

$$\langle \Lambda, x \rangle = |\langle \Lambda, x \rangle| e^{i\vartheta}.$$

Но тогда

$$|\langle \Lambda, x \rangle| = \operatorname{Re} |\langle \Lambda, x \rangle| = \operatorname{Re} \langle \Lambda, e^{-i\vartheta} x \rangle \leq p(x e^{-i\vartheta}) = p(x).$$

Теорема доказана.

## Теорема

Пусть  $X$  — это нормированное линейное пространство, причем

$$Y \subset X \quad \text{и} \quad \lambda \in Y^*,$$

где  $Y$  линейное подпространство  $X$ . Тогда найдется такое продолжение  $\Lambda$  функционала  $\lambda$ , что имеет место равенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Возьмем в качестве полунормы

$$p(x) = \|\lambda\|_{Y^*} \|x\|.$$

Очевидно, имеет место оценка

$$|\langle \lambda, x \rangle| \leq p(x) \quad \text{при} \quad x \in Y.$$

В силу теоремы Хана–Банаха существует линейный функционал  $\Lambda$  такой, что

$$|\langle \Lambda, x \rangle| \leq p(x) = \|\lambda\|_{Y^*} \|x\| \quad \text{при} \quad x \in X.$$

Возьмем *supremum* по  $\|x\| = 1$  от обеих частей и получим неравенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} \leq \|\lambda\|_{Y^*}.$$

С другой стороны,

$$|\langle \lambda, x \rangle| = |\langle \Lambda, x \rangle| \quad \text{для } x \in Y,$$

поэтому взяв *supremum* по  $x \in Y$  получим неравенство

$$\begin{aligned} \|\lambda\|_{Y^*} &= \sup_{\|x\|=1, x \in Y} |\langle \lambda, x \rangle| = \sup_{\|x\|=1, x \in Y} |\langle \Lambda, x \rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|=1, x \in X} |\langle \Lambda, x \rangle| = \|\Lambda\|_{X^*}. \end{aligned}$$

Итак, первое следствие доказано.

## Второе следствие из теоремы Хана–Банаха.

### Теорема

Пусть  $y \in X$ , где  $X$  — это нормированное пространство. Тогда существует ненулевой функционал  $\Lambda \in X^*$  такой, что

$$\langle \Lambda, y \rangle = \|\Lambda\|_{X^*} \|y\|.$$

## Доказательство.

Пусть

$$Y = \{ay \mid a \in \mathbb{C}^1\} \quad \text{и} \quad \langle \lambda, ay \rangle = a\|y\|$$

— это линейный функционал над  $Y \subset X$ . Согласно первому следствию из теоремы Хана–Банаха найдется линейный функционал

$$\Lambda \in X^*, \quad \|\lambda\|_{Y^*} = \|\Lambda\|_{X^*},$$

но

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|y\|=1} |\langle \lambda, y \rangle| = 1,$$

значит,

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1.$$

Причем на  $Y$

$$\langle \Lambda, ay \rangle = \langle \lambda, ay \rangle = a\|y\| \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{C}^1.$$

Следовательно,

$$\langle \Lambda, y \rangle = \|\Lambda\|_{X^*} \|y\|.$$

## Теорема

Пусть  $Z$  — подпространство нормированного пространства  $X$  и пусть  $y \in Z$ , причем

$$\text{distance}\{y, Z\} = d > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал  $\Lambda \in X^*$ , что

$$\|\Lambda\|_{X^*} \leq 1, \quad \langle \Lambda, y \rangle = d, \quad \langle \Lambda, z \rangle = 0$$

для всех  $z \in Z$ .



## Четвертое следствие из теоремы Хана–Банаха.

### Теорема

*Пусть  $\mathbb{B}$  — банахово пространство. Если  $\mathbb{B}^*$  сепарабельно, то  $\mathbb{B}$  также сепарабельно.*

Пусть  $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{B}^*$  — счетное всюду плотное в  $\mathbb{B}^*$  множество.  
Теперь выберем  $\{x_n\} \in \mathbb{B}$  таким образом, чтобы имели место свойства

$$\|x_n\| = 1, \quad |\langle \lambda_n, x_n \rangle| \geq \|\lambda_n\|_*/2.$$

□ Поскольку

$$\|\lambda_n\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle \lambda_n, x \rangle|.$$

Поэтому такая последовательность  $\{x_n\}$  существует.  $\square$ .

## Доказательство-2.

Пусть

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \mid \alpha_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Докажем, что  $\mathcal{D}$  плотно в  $\mathbb{B}$ . Пусть нет. Тогда существует такой элемент

$$y \in \mathbb{B} \setminus \overline{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \lambda \in \mathbb{B}^*,$$

что

$$\langle \lambda, y \rangle \neq 0, \quad \langle \lambda, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\mathcal{D}}.$$

В силу плотности  $\{\lambda_n\}$  в  $\mathbb{B}^*$ , с одной стороны, найдется такая подпоследовательность  $\{\lambda_{n_k}\}$  такая, что

$$\lambda_{n_k} \rightarrow \lambda \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*, \quad \text{т. е.} \quad \|\lambda - \lambda_{n_k}\| \rightarrow 0.$$

С другой стороны, имеет место цепочка

$$\|\lambda_{n_k}\|_*/2 \leq |\langle \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| = |\langle \lambda - \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \leq \|\lambda - \lambda_{n_k}\|_* \rightarrow 0.$$

Значит,

$$\lambda_{n_k} \rightarrow \theta \quad \text{сильно в } \mathbb{B}^*,$$

а значит

$$\lambda = \theta.$$

Противоречие, доказывающее теорему.

Теорема доказана.

# Теоремы Банаха–Штейнгауза.

Пусть

$$F_\alpha : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2, \quad \alpha \in I$$

— это семейство не обязательно линейных отображений банаховых пространств относительно норм  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$ , соответственно.

В этом разделе лекций мы рассмотрим две теоремы, которые все принято называть теоремами Банаха–Штейнгауза.

Как мы покажем все эти теоремы являются следствиями теоремы Бэра о категориях. Но сначала докажем теорему о равномерной ограниченности

# Теорема о равномерной ограниченности.

## Теорема

Пусть

(i) оператор  $F_\alpha$  непрерывен для каждого  $\alpha \in I$ ;

(ii)

$$\|F_\alpha(x+y)\|_2 \leq \|F_\alpha(x)+F_\alpha(y)\|_2, \quad \|F_\alpha(\lambda x)\|_2 \leq |\lambda| \|F_\alpha(x)\|_2$$

для всех  $x, y \in \mathbb{B}_1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  и  $\alpha \in I$ ;

(iii) для каждого  $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leq c(x) < +\infty.$$

Тогда семейство отображений  $\{F_\alpha\}$  равномерно по  $\alpha \in I$

непрерывно в нуле:  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\alpha \in I, \|x\|_1 < \delta} \|F_\alpha(x)\|_2 = 0.$

## Доказательство-1.

Докажем, что для каждого  $F_\alpha$  множество

$$b_n = \{x \in \mathbb{B}_1 : \|F_\alpha(x)\|_2 \leq n\}$$

замкнуто.

□ Действительно, пусть

$$x_m \rightarrow x \quad \text{сильно в } \mathbb{B}_1 \quad \text{и} \quad \{x_m\} \subset b_n,$$

тогда в силу непрерывности  $F_\alpha$

$$F_\alpha(x_m) \rightarrow F_\alpha(x) \quad \text{сильно в } \mathbb{B}_2.$$

Но

$$\|F_\alpha(x_m)\|_2 \leq n \Rightarrow \|F_\alpha(x)\|_2 \leq n \Rightarrow x \in B_n.$$

⊗ Поэтому множество

$$X_n = \bigcap_{\alpha \in I} b_n \quad \text{замкнуто.}$$

Докажем, что

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

□ Действительно, заметим, что в силу условия (iii)

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leq c(x) < +\infty,$$

а в силу определения  $b_n$  имеем

$$X_n = \left\{ x \in \mathbb{B}_1 : \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leq n \right\},$$

но тогда из (iii) вытекает, что каждый элемент  $x \in \mathbb{B}_1$  принадлежит какому-то  $X_n$ . □



## Доказательство-3.

Каждое  $X_n$  замкнуто в  $\mathbb{B}_1$ , а  $\mathbb{B}_1$  является банаховым, поэтому в силу доказанной ранее теоремы Бэра о категориях найдется такое  $n \in \mathbb{N}$  и такой открытый шар

$$O(x_0, \varepsilon) \subset X_n.$$

Это означает, что

$$\text{для всех } \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x_0 + y)\|_2 \leq n.$$

В свою очередь из свойства (ii) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \text{для всех } \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y)\|_2 &\leq \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y + x_0)\|_2 + \\ &+ \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(-x_0)\|_2 \leq n + c(x_0) < +\infty. \end{aligned}$$

Итак,

$$\text{для всех } \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y)\|_2 \leq n + c(x_0) < +\infty.$$

В силу свойства (ii) однородности  $F_\alpha$  имеем

$$y = \frac{\varepsilon}{\delta} x, \quad \sup_{\alpha \in I, \|x\| < \delta} \|F_\alpha(y)\|_2 \leq \frac{\delta}{\varepsilon} (n + c_0(x_0)).$$

Теорема доказана.

# Первая теорема Банаха–Штейнгауза.

## Теорема

Пусть  $\{T_\alpha\}$  — это семейство линейных и непрерывных операторов

$$T_\alpha : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2 \quad \text{для всех } \alpha \in I.$$

Пусть для каждого  $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_2 \leq c(x) < +\infty,$$

тогда

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{1 \rightarrow 2} < +\infty.$$

Применим теорему о равномерной ограниченности к семейству

$$F_\alpha = T_\alpha.$$

Тогда получим, что

$$\sup_{\alpha \in I, \|x\|_1 < \delta} \|T_\alpha x\|_2 < 1,$$

но отсюда заменой получим, что

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{1 \rightarrow 2} = \sup_{\alpha \in I, \|z\|_1 < 1} \|T_\alpha z\|_2 < 1/\delta.$$

Теорема доказана.

## Вторая теорема Банаха–Штейнгауза.

### Теорема

Пусть  $\{T_n\}$  — это последовательность линейных непрерывных операторов, причем

$$T_n : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$$

и

$T_n x \rightarrow T_0 x$  сильно в  $\mathbb{B}_2$  для каждого  $x \in \mathbb{B}_1$ .

Тогда  $T_0$  — линейный и непрерывный оператор.

## Доказательство-1.

Из сильной сходимости вытекает, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\|_2 \leq c_1(x) < +\infty,$$

но тогда из первой теоремы Банаха–Штейнгауза получим, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{1 \rightarrow 2} < +\infty,$$

тогда

$$\|T_0 x\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\|_{1 \rightarrow 2} \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Значит,  $T_0$  — это ограниченный оператор, а в силу линейности непрерывный.

Теорема доказана.

По ходу лекции мы столкнулись уже с двумя типами сходимостей операторов из пространства

$$\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2).$$

Первый тип — это равномерная сходимость:

$$\|A_n - A\|_{1 \rightarrow 2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|(A_n - A)x\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Второй тип — это сильная сходимость:

$$\|(A_n - A)x\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Наконец, еще один тип операторной сходимости — это слабая сходимоть

$$\langle f, (A_n - A)x \rangle \rightarrow 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{B}_1, \quad \text{и } f \in \mathbb{B}_2^*,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — это скобки двойственности между банаховыми пространствами  $\mathbb{B}_2$  и  $\mathbb{B}_2^*$ .

Разумеется у пространства  $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$  есть и "обычные" типы сходимостей как и у всякого банахова пространства и при этом введенная только что слабая операторная сходимоть, вообще говоря, отличается от стандартной слабой сходимости.