

Лекция 10. Метод Галеркина в сочетании с методом монотонности.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

28 октября 2011 г.

Постановка задачи.

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{при } p \geq 2. \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi n(x), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = |\mathbf{E}|^{p-2}\mathbf{E} \quad \text{при } p \geq 2. \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (4)$$

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Теперь мы займемся исследованием свойств оператора

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

который носит название *псевдо-лапласиана*.

Прежде всего докажем, что он является оператором, действующим как

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad (6)$$

где, напомним, $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ является пространством линейных непрерывных функционалов над пространством С. Л. Соболева $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Свойства p -лапласиана-2.

С этой целью заметим, что оператор псевдо-лапласиана можно представить в виде композиции трех отображений следующим образом:

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \operatorname{div}(\xi), \quad \xi = |\eta|^{p-2}\eta, \quad \eta = \nabla u. \quad (7)$$

Пусть $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, тогда справедливы следующие формулы. Во-первых, согласно определению пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$\eta = \nabla u : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega). \quad (8)$$

Во-вторых, проверим, что имеет место следующее выражение для оператора $\xi = |\eta|^{p-2}\eta$:

$$\xi = |\eta|^{p-2}\eta : L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega). \quad (9)$$

Действительно, представим покомпонентно выражение для вектора ξ .

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$
$$\xi_1 = |\eta|^{p-2}\eta_1, \quad \xi_2 = |\eta|^{p-2}\eta_2, \quad \xi_3 = |\eta|^{p-2}\eta_3.$$

Докажем, например, что $\xi_1 = |\eta|^{p-2}\eta_1 \in L^{p'}(\Omega)$.

Действительно, справедливо следующее неравенство:

$$|\xi_1|^{p'} = ||\eta|^{p-2}\eta_1|^{p'} \leq ||\eta|^{p-1}|^{p'} = |\eta|^p,$$

поэтому отсюда вытекает, что если $\eta \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$, то $\xi_1 \in L^{p'}(\Omega)$. Формула (9) доказана. Третий оператор $\operatorname{div}(\xi)$ действует следующим образом:

$$\operatorname{div}(\xi) : L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega). \quad (10)$$

Строгая монотонность оператора p -лапласиана.

Действительно, введем сначала более короткое обозначение

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad (11)$$

и докажем следующее его свойство:

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_1 \rangle \geq 0, \quad (12)$$

причем равенство в этом неравенстве имеет место, тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2$.

Формула интегрирования по частям.

Теперь заметим, что в силу построения оператора псевдо-лапласиана имеет место формула «интегрирования по частям»:

$$\langle \Delta_p u, v \rangle = - \sum_{i=1}^3 \langle |\nabla u|^{p-2} u_{x_i}, v_{x_i} \rangle_1 = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} (\nabla u, \nabla v) dx \quad (13)$$

для всех $u, v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p(\Omega)$ и $L^{p'}(\Omega)$ при $p \in [2, +\infty)$, которые имеют следующий явный вид

$$\langle f, u \rangle_1 = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx \quad \text{для всех } f(x) \in L^{p'}(\Omega), \quad u(x) \in L^p(\Omega),$$

чем мы и воспользовались в формуле (13)

Строгая монотонность.

Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_1 \rangle &= \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2, \nabla u_1 - \nabla u_2) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Справедлива следующая цепочка выражений для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} (|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta, \xi - \eta) &= |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-2}(\xi, \eta) - |\eta|^{p-2}(\xi, \eta) \geq \\ &\geq |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-1}|\eta| - |\eta|^{p-1}|\xi| = \\ &= [|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}][|\xi| - |\eta|] \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

поскольку функция $f(x) = x^{p-1}$ является монотонной при $x \geq 0$ и при $p > 1$.

Определение.

Заметим, что можно доказать более сильное неравенство следующего вида:

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta) \geq 2^{2-p}|\xi - \eta| \quad \text{для всех } \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \quad (16)$$

Определение. *Отображение*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^*$$

называется монотонным относительно скобок двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

между сопряженными банаховыми пространствами, если для всех $u, v \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство:

$$\langle \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v), u - v \rangle \geq 0, \quad (17)$$

и называется строго монотонным, если равенство в формуле (17) имеет место, тогда и только тогда, когда $u = v$.

Определение. Слабым решением задачи (1) при условии, что $f \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, называется функция $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющая следующему равенству:

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{для всех } v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \quad (18)$$

Определение. Оператор $\mathbb{F} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^*$ называется коэрцитивным, если имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle \mathbb{F}(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty. \quad (19)$$

Докажем, что оператор псевдолапласиана является коэрцитивным. Действительно, «интегрированием по частям» доказывается следующая формула:

$$\langle -\Delta_p u, u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \|\nabla u\|_p^p \quad \text{при } p \geq 2. \quad (20)$$

Отсюда и вытекает коэрцитивность.

Лемма об остром угле.

Лемма

Пусть $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, для некоторого $R > 0$ удовлетворяющее условию

$$(Ta, a) \geq 0 \quad \text{при} \quad |a| = R.$$

Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, что $|a| \leq R$ и $Ta = 0$.

Доказательство-1.

Допустим, что

$$\mathbb{T}a \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{K}_R = \{a | a \in \mathbb{R}^n, |a| \leq R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \rightarrow -R \frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R . В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R \frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|}.$$

Очевидно, $|a| = R$ и $(\mathbb{T}a, a) = -R|\mathbb{T}a| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(\mathbb{T}a, a) \geq 0$ для $|a| = R$.

Определение. Будем говорить, что оператор Δ_p удовлетворяет так называемому S^+ свойству, если из того, что

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

и условия, что

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \langle -\Delta_p u_m, u_m - u \rangle \leq 0, \quad (21)$$

вытекает, что

$$u_m \rightarrow u \quad \text{СИЛЬНО в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

S^+ свойство p -лапласиана.

Лемма

Оператор Δ_p удовлетворяет S^+ свойству.

Пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Рассмотрим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, u_m - u \rangle &= \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_m - \nabla u) \geq \\ &\geq 2^{p-2} \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u|^p dx, \quad (22) \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством (16).

Теперь заметим, что в силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\} \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что

$$\langle \Delta_p u, u_m - u \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow +\infty, \quad (23)$$

поэтому переходя к пределу в неравенстве (22) в силу предельного свойства (21) получим, что

$$0 \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u|^p dx \geq 0.$$

Значит,

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Лемма доказана.

заметим, что банахово пространство $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ является сепарабельным, т. е. в нем существует всюду плотное множество $\{w_j\} \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим следующее «галеркинское» приближение:

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^m c_{mk} w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1, \quad (24)$$

причем функции $u_m(x)$ удовлетворяют следующему равенству:

$$\langle -\Delta_p u_m, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех } j = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Локальная разрешимость-1.

Теперь наша задача доказать разрешимость этой системы алгебраических уравнений. С этой целью мы и воспользуемся сформулированной и доказанной ранее леммы 1 об остром угле. С этой целью рассмотрим следующий оператор

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

где

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = (\mathbb{T}_1(\mathbf{c}_m), \dots, \mathbb{T}_m(\mathbf{c}_m)), \quad \mathbf{c}_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm}).$$

$$\mathbb{T}_j(\mathbf{c}_m) = -\langle \Delta_p u_m, w_j \rangle - \langle f, w_j \rangle \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Локальная разрешимость-2.

Теперь рассмотрим стандартное скалярное произведение (\cdot, \cdot) в \mathbb{R}^m . Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) &= -\langle \Delta_p u_m, u_m \rangle - \langle f, w_m \rangle = \|\nabla u_m\|_p^p - \langle f, w_m \rangle \geq \\ &\geq \|\nabla u_m\|_p^p - \|f\|_* \|\nabla u_m\|_p = \|\nabla u_m\|_p (\|\nabla u_m\|_p^{p-1} - \|f\|_*) \geq 0 \end{aligned}$$

при достаточно большом $r : \|\nabla u_m\|_p = r > 0$, где символом $\|\cdot\|_*$ обозначена норма банахова пространства $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, а символом $\|\nabla u\|_p$ обозначена норма банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|\nabla u\|_p = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

и мы воспользовались следующим общим неравенством:

$$|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех } f \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}.$$

Локальная разрешимость-3.

Осталось заметить, что на конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^m все нормы эквивалентны, поэтому мы приходим к выводу, что найдется такое достаточно большое $R > 0$, что будет выполнено неравенство

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) \geq 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| = R > 0.$$

Следовательно, в силу леммы об остром угле существует такое $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$, что

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| \leq R,$$

т. е. алгебраическая система (25) имеет решение $u_m \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Тем самым, у нас имеется последовательность $\{u_m\}$ «галеркинских» приближений. Вот здесь заключается важный момент — нужно доказать, что при $m \rightarrow +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ имеет место слабая сходимость

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty,$$

причем $u(x)$ удовлетворяет равенству (18).

Прежде всего умножим равенство (25) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим следующее равенство:

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle, \quad (26)$$

в котором после «интегрирования по частям» мы получим следующую цепочку выражений:

$$\|\nabla u_m\|_p^p = \langle f, u_m \rangle \leq \|f\|_* \|\nabla u_m\|_p$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|\nabla u_m\|_p \leq \|f\|_*^{1/(p-1)} \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в банаховом пространстве $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, и поэтому в силу теоремы 4 Лекции 1 существует такая ее подпоследовательность $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$, для которой

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \quad (28)$$

Теперь докажем, что выполнено свойство

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \langle -\Delta_p u_m, u_m - u \rangle \leq 0.$$

Действительно, в силу (25) имеет место следующее равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle \rightarrow 0, \quad (29)$$

Теперь выберем последовательность вида

$$v_m = \sum_{j=1}^m k_{mj} w_j \quad (30)$$

такую, что

$$v_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \quad (31)$$

Теперь умножим обе части равенства (25) на k_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \langle f, v_m \rangle. \quad (32)$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p u_m, u_m - u \rangle &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u \rangle = \\ &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \\ &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle - \langle f, v_m \rangle = \\ &= \langle f, u_m - v_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle = I_{1m} + I_{2m}.\end{aligned}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Действительно, имеет место неравенство

$$|I_{1m}| \leq |\langle f, u_m - v_m \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow +\infty, \quad (33)$$

поскольку

$$u_m - v_m = (u_m - u) - (v_m - u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Оценим второе слагаемое I_{2m} . Действительно, имеет место следующая оценка:

$$|I_{2m}| \leq |\langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle| \leq \|\Delta_p u_m\|_* \|u - v_m\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow +\infty, \quad (34)$$

поскольку имеет место свойство (31)

S^+ свойство. Продолжение-4.

и, кроме того, так как имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\Delta_p u_m\|_* &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle -\Delta_p u_m, \varphi \rangle| = \\ &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2} (\nabla u_m, \nabla \varphi) dx \right| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-1} |\nabla \varphi| dx \leq \\ &\leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right)^{1/p'} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \right)^{1/p'} \leq \|f\|_*^p. \end{aligned}$$

Но тогда уж тем более имеет место свойство (21). Теперь осталось воспользоваться леммой 2 и получить следующий важный результат:

$$u_{m_m} \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \quad (35)$$

Теперь наша ближайшая задача доказать, что

$$\Delta_p u_{m_m} \rightarrow \Delta_p u \quad \text{сильно в } \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \quad (36)$$

Липшиц–непрерывность-1.

С этой целью нам нужно доказать так называемую *липшиц–непрерывность* оператора псевдолапласиана. Рассмотрим отдельно следующее выражение:

$$||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta| \quad \text{для любых } \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$$

и получим для него две «грубые» оценки, из которых потом получим одну «тонкую» оценку. Действительно, имеет место первая оценка

$$\begin{aligned} ||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta| &= ||\xi|^{p-2}[\xi - \eta] + \eta [|\xi|^{p-2} - |\eta|^{p-2}]| \leq \\ &\leq |\xi|^{p-2}|\xi - \eta| + (p-2)|\eta| \max\{|\xi|^{p-3}, |\eta|^{p-3}\} |\xi - \eta|, \end{aligned} \quad (37)$$

а теперь вторая

$$\begin{aligned} ||\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi| &= ||\eta|^{p-2}[\eta - \xi] + \xi [|\eta|^{p-2} - |\xi|^{p-2}]| \leq \\ &\leq |\eta|^{p-2}|\eta - \xi| + (p-2)|\xi| \max\{|\eta|^{p-3}, |\xi|^{p-3}\} |\eta - \xi|, \end{aligned} \quad (38)$$

из которых вытекает «тонкая» оценка и дальнейшие выражения

$$\begin{aligned} \left| |\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta \right| &\leq \min \{ |\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2} \} |\xi - \eta| + \\ &+ (p-2) \min \{ |\xi|, |\eta| \} \frac{\max \{ |\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2} \}}{\min \{ |\xi|, |\eta| \}} |\xi - \eta| = \\ &= (p-1) \max \{ |\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2} \} |\xi - \eta| \quad (39) \end{aligned}$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и $p \geq 2$.

Липшиц-непрерывность-3.

Теперь согласно определению нормы банахова пространства $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} \|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* &= \sup_{\|w\| \leq 1} |\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, w \rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m) \cdot \nabla w \, dx \right| \leq \\ &\leq (p-1) \sup_{\|w\| \leq 1} \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u| \max\{|\nabla u|^{p-2}, |\nabla u_m|^{p-2}\} |\nabla w| \, dx = I, \end{aligned} \tag{40}$$

где мы воспользовались неравенством (39).

Липшиц-непрерывность-4.

Теперь воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера для последнего интеграла в цепочке выражений (40).

Действительно, в обобщенном неравенстве Гельдера положим соответственно

$$p_1 = p, \quad p_2 = \frac{p}{p-2}, \quad p_3 = p, \quad r = 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1.$$

И тогда получим следующее неравенство для выражения I :

$$\begin{aligned} I \leq & (p-1) \left(\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla u_m|^p dx \right)^{1/p} \times \\ & \times \left(\int_{\Omega} \max \{ |\nabla u|^p, |\nabla u_m|^p \} dx \right)^{(p-2)/p} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (41)$$

Таким образом из неравенств (40) и (41) вытекает следующая оценка

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* \leq \mu(\mathbf{R}_m) \|\nabla u - \nabla u_m\|_p, \quad (42)$$

$$\mu(\mathbf{R}_m) = c_1 \mathbf{R}_m^{p-2}, \quad \mathbf{R}_m = \max \{ \|\nabla u\|_p, \|\nabla u_m\|_p \}.$$

В силу свойства (27) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$\mu(\mathbf{R}_m) \leq c_1 \max \left\{ \|\nabla u\|_p, \|f\|_*^{1/(p-1)} \right\},$$

т. е. ограничена величиной, которая не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Тем самым, мы в силу (35) и (42) приходим к выводу о том, что

$$\Delta_p u_m \rightarrow \Delta_p u \quad \text{сильно в } \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega). \quad (43)$$

Предельный переход.

Теперь осталось перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в равенстве (25) и получить с учетом (43) следующий результат:

$$\langle -\Delta_p u, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех } j = \overline{1, +\infty}, \quad (44)$$

из которого в силу плотности счетного семейства $\{w_j\}$ в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что построенная функция $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ удовлетворяет равенству (18) определения 2 слабого решения. Осталось доказать единственность слабого решения. Для этого воспользуемся неравенством (16), из которого вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_1 \rangle &= \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1, \nabla u_2 - \nabla u_1) dx \geq \\ &\geq 2^{2-p} \int |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx. \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь возьмем в неравенстве (45) в качестве $u_1, u_2 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ какие то два слабых решения в смысле определения 2, но тогда из неравенства (45) вытекает, равенство

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx = 0.$$

Отсюда вытекает единственность решения задачи (1), понимаемого в слабом смысле определения 2.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема

Для всякой $f \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ существует единственное слабое обобщенное решение $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ задачи (1), понимаемой в слабом смысле определения 2.