

Лекция 11. Метод Галеркина в сочетании с методом компактности.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

5 ноября 2011 г.

Постановка задачи.

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^3 с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$.

Приведем классическую постановку рассматриваемой в дальнейшем задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^q u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

где $q > 0$ и

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Определение. Слабым обобщенным решением задачи (1), (2) назовем функцию $u(x)(t)$ класса $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, $u'' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, удовлетворяющую задаче

$$\int_0^T dt \langle u'' - \Delta u + |u|^q u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad q \in (0, 4], \quad (3)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Задача (3)–(4) эквивалентна следующей

$$\int_0^T dt \varphi(t) \langle u'' - \Delta u + |u|^q u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \forall \varphi(t) \in \mathbb{L}^1(0, T),$$

(5)

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega). \quad (6)$$

Теорема

Пусть $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ и $q \in (0, 2]$. Тогда существует единственное слабое обобщенное решение задачи (1), (2) в смысле определения 1 в классе $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, $u'' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$.

Приближенные решения-1.

Рассмотрим теперь «приближенную» к задаче (5)–(6) следующую задачу

$$\int_0^{T_m} dt \varphi(t) \langle u_m'' - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \rangle = 0, \quad u_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k, \quad (7)$$

$$T_m > 0, \quad w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \forall \varphi(t) \in \mathbb{L}^1(0, T), \quad j = \overline{1, m},$$

$$u_m(0) = u_{m0} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u_m'(0) = u_{m1} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (8)$$

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m], \quad (9)$$

где

$$u_{m0} = \sum_{i=1}^m \alpha_{mi} w_i \rightarrow u_0 \text{ СИЛЬНО в } \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

$$u_{m1} = \sum_{i=1}^m \beta_{mi} w_i \rightarrow u_1 \text{ СИЛЬНО в } \mathbb{L}^2(\Omega),$$

Относительно системы функций $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ предположим, что это решения задачи на собственные значения и собственные функции

$$\Delta w_j + \lambda_j w_j = 0, \quad w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Известно, что система функций $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ линейно независима и плотна в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Поскольку $\mathbb{C}_0^\infty[0, T_m] \subset \mathbb{L}^1(0, T_m)$, то в (1.17) возьмем функцию $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, T_m]$. С другой стороны, в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m]$ имеем

$$\left\langle u_m'' - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle \in \mathbb{C}[0, T_m].$$

Отсюда в силу основной леммы вариационного исчисления получим поточечную по $t \in [0, T_m]$ систему m уравнений:

$$\left\langle u_m'' - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10)$$

Поскольку $w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$, поэтому

$$\langle w_k, w_j \rangle = (w_k, w_j)_2, \quad \langle \Delta w_k, w_j \rangle = (\nabla w_k, \nabla w_j)_2.$$

Система дифференциальных уравнений.

Кроме того, поскольку по построению $u_m \in \mathbb{L}^\infty(0, T_m; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, T_m; \mathbb{L}^{q+2}(\Omega))$ при $q \in [0, 4]$ имеем

$$|u_m|^q u_m \in \mathbb{L}^\infty(0, T_m; \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)).$$

С другой стороны, $w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Поэтому

$$\langle |u_m|^q u_m, w_j \rangle = (|u_m|^q u_m, w_j)_2.$$

В силу этого из (10) вытекает следующая задача

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (w_k, w_j)_2 c''_{mk}(t) + \sum_{l=1}^m (\nabla w_k, \nabla w_j)_2 c_{ml}(t) + \\ + (|u_m|^q u_m, w_j)_2 = 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу линейной независимости системы w_1, \dots, w_m имеем

$$\det (w_k, w_j)_2 \neq 0.$$

Поэтому система (11) после обращения матрицы $\|a_{kj}\| = \|(w_k, w_j)_2\|$ примет вид системы типа Коши–Ковалевской, а, значит, найдется такое $T_m > 0$, что система (11) с соответствующими начальными условиями имеет решение $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m]$.

Априорные оценки-1.

Умножим уравнение (10), отвечающее индексу j , на c'_{mj} и просуммируем по j . Тогда получим

$$\left(u''_m, u'_m\right)_2 + (\nabla u_m, \nabla u'_m)_2 + \left(|u_m|^q u_m, u'_m\right)_2 = 0, \quad (12)$$

откуда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u'_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 \right] + \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} = 0. \quad (13)$$

В силу (13) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\|u'_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 \right] + \frac{1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} = \\ & = \frac{1}{2} \left[\|u_{m1}\|_2^2 + \|\nabla u_{m0}\|_2^2 \right] + \frac{1}{q+2} \|u_{m0}\|_{q+2}^{q+2}. \quad (14) \end{aligned}$$

По условию имеем

$$u_{m0} \rightarrow u_0 \text{ сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u_{m1} \rightarrow u_1 \text{ сильно в } \mathbb{L}^2(\Omega),$$

что означает выполнение неравенства

$$\frac{1}{2} \left[\|u_m'\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 \right] + \frac{1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} \leq C(T), \quad (15)$$

где постоянная $C(T)$ — не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Из (15) вытекает, что

$$u_m \text{ ограничены в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad u_m' \text{ ограничены в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \quad (16)$$

Отсюда в частности следует что $T_m > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Предельный переход-1.

Пространство

$$\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

является сопряженным к

$$\mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

и поэтому из последовательности u_m можно выделить такую последовательность u_μ , что

$$u_\mu \rightharpoonup u \text{ * -слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (17)$$

$$u'_\mu \rightharpoonup v \text{ * -слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)). \quad (18)$$

Из (17) вытекает, что

$$u'_\mu \rightharpoonup u' \text{ в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (19)$$

и, следовательно, в силу (18) имеем $v = u'$. Кроме того, из (17) и (18) вытекает, что u_m принадлежат ограниченному множеству $\mathbb{H}^1(Q)$, $Q = (0, T) \times \Omega$. Однако, как известно вложение $\mathbb{H}^1(Q)$ в $\mathbb{L}^2(Q)$ компактно. Здесь мы применяем метод компактности!!! Итак мы можем считать, что подпоследовательность u_μ , удовлетворяет условию

$$u_\mu \rightarrow u \text{ сильно в } \mathbb{L}^2(Q) \text{ и почти всюду.} \quad (20)$$

И, наконец, поскольку $|u_m|^q u_m$ ограничены в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega))$, то можно еще предположить, что

$$|u_m|^q u_m \rightharpoonup w \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)). \quad (21)$$

Существенно важный момент — здесь мы сталкиваемся с одной из наиболее типичных трудностей нелинейных задач — доказательство того, что

$$w = |u|^q u. \quad (22)$$

Предельный переход-3.

На этот вопрос отвечает следующая лемма.

Лемма

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t$, g_m и g — такие функции из $\mathbb{L}^p(Q)$, $1 < p < +\infty$, что

$$\|g_m\|_{\mathbb{L}^p(Q)} \leq C, \quad g_m \rightarrow g \quad \text{почти всюду в } Q.$$

Тогда $g_m \rightharpoonup g$ слабо в $\mathbb{L}^p(Q)$.

Предельный переход-4.

Таким образом, равенство (22) доказано, и можно перейти к пределу в (10), полагая $m = \mu$. В силу (17) и (18) имеем

$$(\nabla u_\mu, \nabla w_j)_2 \rightharpoonup (\nabla u, \nabla w_j)_2 \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \quad (23)$$

$$(u'_\mu, w_j)_2 \rightharpoonup (u', w_j)_2 \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \quad (24)$$

$$(|u_\mu|^q u_\mu, w_j)_2 \rightharpoonup (|u|^q u, w_j)_2 \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \quad (25)$$

и, следовательно,

$$(u''_\mu, w_j)_2 = \frac{d}{dt} (u'_\mu, w_j)_2 \rightarrow (u'', w_j)_2 \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T). \quad (26)$$

С другой стороны, в силу (10) имеем

$$\left(u_m'', w_j\right)_2 = \left\langle u_m'', w_j \right\rangle = (\nabla u_m, \nabla w_j)_2 - (|u_m|^q u_m, w_j)_2 = 0. \quad (27)$$

Значит,

$$\left(u_m'', w_j\right)_2 \rightarrow (v, w_j)_2 \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \quad (28)$$

откуда в силу (26) получаем $v = u''$.

Теперь мы можем перейти к пределу при $m = \mu \rightarrow +\infty$ в задаче (7) и с учетом (23)–(28) получить

$$\int_0^T dt \varphi(t) \langle u'' - \Delta u + |u|^q u, w_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad \forall \varphi(t) \in \mathbb{L}^1(0, T). \quad (29)$$

Отсюда в силу плотности «галеркинского» базиса $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ мы получим из (29) задачу (5).

Начальные условия-1.

Нам осталось доказать, что построенная функция $u(x)(t)$ удовлетворяет начальным условиям (6). Действительно, по построению имеем $u_\mu(0) = u_{\mu 0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. С другой стороны, в силу (17)–19 после возможного исправления на $[0, T]$ на множестве нулевой меры Лебега получим

$$u_\mu(0) \rightarrow u(0) \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Отсюда следует, что имеет место начальное условие $u(0) = u_0$. Теперь в силу (28) имеем

$$\left(u_m'', w_j \right)_2 \rightarrow (v, w_j)_2 \text{ * -слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \quad (30)$$

и, следовательно,

$$\left(u'_\mu(0), w_j \right)_2 \rightarrow \left(u', w_j \right)_2 \Big|_{t=0} = (u'(0), w_j). \quad (31)$$

Начальные условия-2.

Поскольку

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right)_2 \rightarrow (u_1, w_j)_2, \quad (32)$$

то имеем

$$\left(u'(0), w_j\right)_2 = (u_1, w_j)_2 \quad \forall j. \quad (33)$$

Лемма

Пусть $v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, $v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, тогда имеет место следующее равенство для почти всех $t \in (0, T)$

$$\|v\|_2^2(t) - \|v\|_2^2(0) = 2 \int_0^t ds \left(v', v \right)_2(s).$$

Лемма

Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $q \in (0, 2]$. Тогда решение u , полученное в теореме 1, единственно.

Единственность-3.

Пусть u_1 и u_2 — два слабых обобщенных решения задачи в смысле определения 1 и $w = u_1 - u_2$. Пусть $s \in (0, T)$.

Положим

$$\psi(t) = \left\{ \begin{array}{l} - \int_t^s w(\sigma) d\sigma, \quad t \leq s; \\ 0 \text{ при } t > s \end{array} \right\},$$

$$w_1(t) = \int_0^t w(\sigma) d\sigma, \text{ так что } \psi(t) = w_1(t) - w_1(s), \text{ если } t \leq s.$$

Тогда из (3) положив $v = \psi(t)$ получим

$$\int_0^T dt \langle w'' - \Delta w + |u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi(t) \rangle = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0.$$

(34)

Откуда, интегрируя по частям, получим

$$-\int_0^s (w', \psi')_2 dt + \int_0^s (\nabla w, \nabla \psi)_2 dt = -\int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2,$$

а поскольку $\psi'(t) = w(t)$, в силу леммы 2 имеем

$$-\int_0^s (w', w)_2 dt = -\frac{1}{2} \|w\|_2^2(s).$$

Поскольку $w_1(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и $w(t) = w_1'(t)$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \int_0^s (\nabla w(t), \nabla \psi(t))_2 &= \int_0^s (\nabla \psi'(t), \nabla \psi(t))_2 dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} (\nabla \psi(t), \nabla \psi(t))_2 dt = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla \psi(s), \nabla \psi(s))_2 - \frac{1}{2} (\nabla \psi(0), \nabla \psi(0))_2 = -\frac{1}{2} \|\nabla w_1(s)\|_2^2. \end{aligned}$$

Тогда приходим к равенству

$$\frac{1}{2} \|w\|_2^2(s) + \frac{1}{2} \|\nabla w_1(s)\|_2^2 = \int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2 dt. \quad (35)$$

Рассмотрим отдельно выражение в правой части, т. е. с учетом равенства $\psi(t) = w'(t)$ выражение

$$\begin{aligned} I &= \int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2 dt = \\ &= \int_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, w_1(t) - w_1(s))_2 dt \leq \\ &\leq (q+1) \int_0^s \int dx |w(t)| [|w_1(t)| + |w_1(s)|] \max\{|u_1|^q, |u_2|^q\} dt. \end{aligned}$$

Единственность-7.

Теперь воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера со следующими показателями:

$$p_1 = \frac{q+2}{q}, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = r, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1,$$

где потребуем, чтобы

$$r \leq 2^*.$$

Откуда сразу же получим, что

$$r = \frac{2(q+2)}{2-q}$$

и, стало быть, при $N \geq 3$ имеем

$$\frac{2(q+2)}{2-q} \leq \frac{2N}{N-2} \Rightarrow q \leq \frac{2}{N-1},$$

а при $N = 1, 2$ имеем $q \in [0, 2)$.

При выполнении указанных условий на q и N имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset L^r(\Omega).$$

Итак, из (36) получим следующее неравенство

$$\begin{aligned}
 I &\leq (q+1) \int_0^s dt \|w\|_2(t) [\|w_1(s)\|_r + \|w_1(t)\|_r] \times \\
 &\quad \times \max \left\{ \|u_1\|_{q+2}^q(t), \|u_2\|_{q+2}^q(t) \right\} \leq \\
 &\leq c_1 \int_0^s dt \|w\|_2(t) [\|\nabla w_1(s)\|_2 + \|\nabla w_1(t)\|_2] dt \leq \\
 &\leq c_2(\varepsilon) \int_0^s dt \|w\|_2^2(t) + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla w_1(s)\|_2^2 + \\
 &\quad + c_3 \int_0^s dt \left[\frac{1}{2} \|w\|_2^2(t) + \frac{1}{2} \|\nabla w_1\|_2^2(t) \right] \quad (37)
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу (35) и (37) приходим к неравенству

$$\|w\|_2^2(t) + \|\nabla w_1\|_2^2(t) \leq C_4(T) \int_0^t ds [\|w\|_2^2(s) + \|\nabla w_1\|_2^2(s)].$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла–Белмана приходим к выводу, что $u_1 = u_2$ почти всюду.