Лекция 3. Нелинейные операторы.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

29 сентября 2011 г.

Обозначения.

Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\| \quad \|_1$ и $\| \quad \|_2$ соответственно. Пусть, кроме того, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ есть соответствующие скобки двойственности. Рассмотрим некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор

$$\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Производная Гато.

Определение 1. *Оператор* $\mathbb{F}$ *называется дифференцируемым по Гато в точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *если для любого* $h \in \mathbb{B}_1$ *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}_g'(u)h \right\|_2 = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbb{F}_g'(u)$ *при каждом фиксированном* $u \in \mathbb{B}_1$ *есть линейный оператор из* $\mathbb{B}_1$ *в* $\mathbb{B}_2$. *При этом, вообще говоря, нелинейный по* $u \in \mathbb{B}_1$ *оператор* $\mathbb{F}_g'(u)$ *называется производной Гато оператора* $\mathbb{F}$.

ПРИМЕР 1. Введем $\mathbb{B}_2-$значную функцию

$$\varphi(\lambda) \equiv \mathbb{F}(u + \lambda h),$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}_1$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Тогда, как нетрудно видеть, согласно определению 1 имеет место равенство

$$\mathbb{F}'_g(u)h = \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}.$$

Пример 2.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь случай линейного оператора

$$\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Тогда, очевидно, в силу линейности этого отображения имеет место следующее равенство:

$$\frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} = \mathbb{F}h,$$

т. е.

$$\mathbb{F}_g'(u) = \mathbb{F}.$$

Тем самым, приходим к выводу о том, что линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$ является бесконечное число раз дифференцируемым по Гато, причем всякий раз соответствующая производная Гато совпадает с самим оператором.

Пример 3.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим теперь следующее отображение:

$$\mathbb{F} = (\mathbb{F}_1, ..., \mathbb{F}_n) : \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n,$$

Возьмем в этом предельном равенстве в качестве h вектор $e_j \in \mathbb{R}_m$:

$$e_j = (0, ..0, 1, 0, ..., 0),$$

где 1 стоит на $j-$ом месте. Согласно определению 1 при фиксированном $u \in \mathbb{R}_m$

$$\mathbb{F}_g^{'}(u)$$

есть линейный оператор из $\mathbb{R}_m$ в $\mathbb{R}_n$. Поэтому

$$\mathbb{F}_g^{'}(u)e_j = \mathbb{A}e_j$$

$$(\mathbb{A}e_j)_k = a_{kj} \quad j \in \overline{1, m} \quad \text{и} \quad k \in \overline{1, n}.$$

Пример 3.

$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\frac{\mathbb{F}_k(u+\lambda e_j)-\mathbb{F}_k(u)}{\lambda}-a_{kj}\right|=0.$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\mathbb{F}_k(u+\lambda e_j)-\mathbb{F}_k(u)}{\lambda}=\frac{\partial\mathbb{F}_k}{\partial u_j}(u).$$

$$a_{kj}=\frac{\partial\mathbb{F}_k}{\partial u_j}(u).$$

Пример 4.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$\mathbb{G}(u) = \int\limits_0^1 k(x,y)g(u(y),y)\,dy \quad \text{для всех} \quad y \in [0,1].$$

В качестве банаховых пространств $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ возьмем $\mathbb{C}[0,1]$ и потребуем, чтобы

$$k(x,y) \in \mathbb{C}([0,1]\times[0,1]), \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^1 \times [0,1]).$$

В силу этих предположений имеет место предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{g(u+\lambda h, x) - g(u,x)}{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial u}(u,x)h(x).$$

Поэтому производная Гато оператора Гаммерштейна имеет вид

$$\mathbb{G}'_g(u)h = \int\limits_0^1 k(x,y)\frac{\partial g}{\partial u}(u(y),y)h(y)\,dy \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0,1].$$

Производная Фреше.

Определение 2. *Оператор* $\mathbb{F}$ *называется дифференцируемым по Фреше в точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *если в окрестности этой точки для любого* $h \in \mathbb{B}_1$ *имеет место следующее представление*:

$$\mathbb{F}(u+h) = \mathbb{F}(u) + \mathbb{F}'_f(u)h + \omega(u,h), \qquad (2)$$

причем

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega(u,h)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \qquad (3)$$

Линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ *оператор*

$$\mathbb{F}'_f(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

называется производной Фреше оператора $\mathbb{F}$.

Пример 5.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим отображение, определенное формулой

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Докажем, что оно дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше.

Пример 5.

Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\frac{\mathbb{F}(x+\lambda h)-\mathbb{F}(x)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda^4 h_1^3 h_2}{\lambda^4 h_1^4+\lambda^2 h_2^2}=$$
$$=\lambda\frac{h_1^3 h_2}{\lambda^2 h_1^4+h_2^2}\to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to 0$$

в точке $x=(0,0)$.

Пример 5.

Предположим, что производная Фреше этого отображения существует в точке $(0, 0)$ и равна нулевому отображению Θ. Действительно, согласно определению 2 производной Фреше и явному виду отображения $\mathbb{F}$ имеет место следующее равенство:

$$\mathbb{F}(h) = \omega(\theta, h), \quad \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(\theta, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to +0.$$

Значит, с необходимостью получаем, что

$$\frac{\|\mathbb{F}(h)\|}{\|h\|} \to 0.$$

Пример 5.

Рассмотрим стремление к точке $(0,0)$ вектора $h \in \mathbb{R}^2$ по кривой $h_2 = h_1^2$. Действительно, имеет место равенство

$$\frac{\|\mathbb{F}(h)\|}{\|h\|} = \frac{|h_1|^3|h_2|}{h_1^4 + h_2^2} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$
$$= \frac{|h_1|h_1^4}{h_1^4 + h_1^4} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + h_1^2}} \to \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0.$$

Полученное предельное равенство означает, что производной Фреше в точке $(0,0)$ не существует. Тем самым, из существования производной Гато в какой-то точке не следует существование производной Фреше в этой же точке.

Какая связь между производной Гато и производной Фреше?

Возникает естественный вопрос: при каких дополнительных условиях вытекает существование производной Фреше в некоторой точке при условии существования производной Гато в той же точке. Для ответа на этот вопрос нам необходимо доказать следующие два утверждения о среднем значении. Во-первых, справедлив следующий результат.

Вспомогательная теорема 1.

Теорема

Пусть $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$. *Тогда для каждой пары* $u, h \in \mathbb{B}$ *найдется такое число* $\lambda = \lambda(u, h) \in (0, 1)$, *что имеет место формула*

$$\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) = \left\langle \mathbb{F}'_g(u + \lambda h), h \right\rangle, \tag{4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *есть скобки двойственности между банаховыми пространствами* $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}^*$.

Доказательство теоремы 1.

Введем вещественно-значную функцию

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{F}(u + \lambda h).$$

В силу замечания 1 имеем

$$\varphi^{'}(\lambda) = \left\langle \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h), h \right\rangle.$$

Заметим теперь, что в силу теоремы Лагранжа для вещественных функций имеет место равенство

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi^{'}(\lambda) \quad \text{при некотором} \quad \lambda \in (0, 1).$$

Значит, справедливо равенство (4).

Вспомогательная теорема 2.

Только что доказанная теорема позволит нам доказать следующий результат.

Теорема

Пусть $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$, *тогда для каждой пары* $u, h \in \mathbb{B}_1$ *и* $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ *найдется такое вещественное число* $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$, *что имеют место следующие выражения*:

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g'(u + \lambda h)h \right\rangle_2 \qquad (5)$$

и

$$\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant \left\| \mathbb{F}_g'(u + \lambda h) \right\|_{1\to 2} \|h\|_1 \qquad (6)$$

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим вещественнозначную функцию:

$$\varphi(u) \equiv \langle f^*, \mathbb{F}(u)\rangle_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Из дифференцируемости по Гато оператора $\mathbb{F}(u)$ вытекает дифференцируемость по Гато функции

$$\varphi(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Причем имеет место равенство

$$\left\langle \varphi_g'(u), h \right\rangle_1 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g'(u)h \right\rangle_2.$$

В силу теоремы 1 имеет место равенство

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) = \left\langle \varphi_g'(u+\lambda h), h \right\rangle_1$$

при некотором числе $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 2.

Значит, имеет место равенство

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g'(u+\lambda h)h \right\rangle_2 .$$

В силу следствия из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{2*} = 1$, что

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2.$$

Непрерывная производная Гато $\Leftrightarrow$ производная Фреше.

Наконец, мы в состоянии доказать следующий результат.

Теорема

Пусть оператор $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *является дифференцируемым по Гато в некоторой окрестности точки* $u \in \mathbb{B}_1$ *и производная Гато* $\mathbb{F}'_g(\cdot)$ *непрерывна в точке* $u \in \mathbb{B}_1$. *Тогда оператор* $\mathbb{F}$ *дифференцируем по Фреше в этой же точке* $u \in \mathbb{B}_1$ *и*

$$\mathbb{F}'_g(u) = \mathbb{F}'_f(u).$$

Доказательство теоремы 3.

Введем обозначение:

$$\omega(u,h) \equiv \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}_g^{'}(u)h.$$

Пусть $f^* \in \mathbb{B}_2^*$, тогда имеем

$$\langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2 = \langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\rangle_2 - \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u)h \right\rangle_2 .$$

По теореме 2 найдется такое число $\lambda = \lambda(u,h,f^*) \in (0,1)$, что

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u+\lambda h)h \right\rangle_2 .$$

Следовательно,

$$\langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u+\lambda h)h - \mathbb{F}_g^{'}(u)h \right\rangle_2 .$$

Доказательство теоремы 3.

По следствию из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{*2} = 1$, что

$$\|\omega(u,h)\|_2 = \langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2 .$$

Значит, имеет место неравенство

$$\|\omega(u,h)\|_2 \leqslant \left\|\mathbb{F}_g^{'}(u+\lambda h) - \mathbb{F}_g^{'}(u)\right\|_{1\to 2} \|h\|_1 .$$

Следовательно, в силу непрерывности $\mathbb{F}_g^{'}(\cdot)$ в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место неравенство

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega(u,h)\|_2}{\|h\|_1} \leqslant \lim_{\|h\|_1\to 0} \left\|\mathbb{F}_g^{'}(u+\lambda h) - \mathbb{F}_g^{'}(u)\right\|_{1\to 2} = 0.$$

Непрерывность производной Фреше.

Теорема

Пусть $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *— это отображение, дифференцируемое по Фреше в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$*, тогда отображение* $\mathbb{F}$ *непрерывно в этой точке.*

Доказательство теоремы 4.

Действительно, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление:

$$\left\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}'_f(u)h\right\|_2 \leqslant \|h\|_1$$

при достаточно малом $h \in \mathbb{B}_1$. Но тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant \left\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}'_f(u)h\right\|_2 + \\ + \left\|\mathbb{F}'_f(u)h\right\|_2 \leqslant \left(1 + \left\|\mathbb{F}'_f(u)\right\|_{1\to 2}\right) \|h\|_1 .$$

Пример 6.

ПРИМЕР 6. Приведем пример отображения, дифференцируемого по Гато в некоторой точке, но не непрерывной в этой точке. Пусть

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2}{x_1^6 + x_2^3}, & \text{при} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0); \\ 0, & \text{при} \quad (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Пример 6.

Действительно, выражение

$$\frac{\mathbb{F}(x+\lambda h)-\mathbb{F}(x)}{\lambda}$$

в точке $x=(0,0)$ имеет вид

$$\frac{\lambda^5 h_1^4 h_2}{\lambda\left(\lambda^6 h_1^6+\lambda^3 h_2^3\right)}=\lambda\frac{h_1^4 h_2}{\lambda^3 h_1^6+h_2^3}\to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to 0.$$

Значит, производная Гато указанного отображения существует в точке $x=(0,0)$ и равна нулевому отображению

$$\mathbb{F}_g^{'}(\theta)=\Theta.$$

Пример 6.

Докажем, что тем не менее отображение $\mathbb{F}$ не непрерывно в нуле. Действительно, рассмотрим кривую в $\mathbb{R}^2$ $x_2 = \lambda x_1^2$ при $\lambda > 0$. И устремим точку (x_1, x_2) к $(0,0)$ вдоль этой кривой. Тогда получим

$$\mathbb{F}(x)\Big|_{x_2=\lambda x_1^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^3}.$$

Таким образом, предел при $x \to (0,0)$ вдоль кривой $x_2 = \lambda x_1^2$ зависит от параметра $\lambda > 0$. Следовательно, указанное отображение $\mathbb{F}$ не является непрерывным в точке $(0,0)$.

Частичная непрерывность производной Гато.

Однако, в случае дифференцируемости по Гато есть некоторый ослабленный вариант непрерывности. Справедлива следующая лемма.

Лемма

Пусть отображение $\mathbb{F}$ *дифференцируемо по Гато в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$. *Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$\|\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant c|\lambda|, \tag{7}$$

где $c = c(u, h) > 0$.

Доказательство леммы.

В силу дифференцируемости по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h)-\mathbb{F}(u)}{\lambda}\right\|_2 \leqslant \left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h)-\mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}_g^{\prime}(u)h\right\|_2 + \\ + \left\|\mathbb{F}_g^{\prime}(u)h\right\|_2 \leqslant c_1 + c_2 = c_3,$$

где c_3 не зависит от λ. Отсюда вытекает неравенство (7).

Цепное правило для производных Фреше.

Теорема

Пусть $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *и* $\mathbb{G} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, *причем оператор* $\mathbb{F}$ *дифференцируем по Фреше в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *а оператор* $\mathbb{G}$ *дифференцируем по Фреше в точке* $\mathbb{F}(u)$. *Тогда их композиция*

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, *причем имеет место следующее равенство*:

$$\mathbb{K}'_f(u) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u). \tag{8}$$

Доказательство теоремы 5.

$$\left\|\mathbb{K}(u+h)-\mathbb{K}(u)-\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u)\right\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\mathbb{G}(\mathbb{F}(u+h))-\mathbb{G}(\mathbb{F}(u))-\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\left[\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\right]\right\|_3 +$$
$$+\left\|\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\left[\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)-\mathbb{F}'_f(u)h\right]\right\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant \|\omega_1(\mathbb{F}(u),\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u))\|_3+\left\|\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\right\|_{2\to 3}\|\omega_2(u,h)\|_3.$$

Доказательство теоремы 5.

Теперь заметим, что в силу дифференцируемости по Фреше оператора $\mathbb{F}$ имеет место оценка

$$\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant c\|h\|_1.$$

Поэтому имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega_1(\mathbb{F}(u), \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u))\|_3}{\|h\|_1} =$$

$$= \lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega_1(\mathbb{F}(u), \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u))\|_3}{\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2} \frac{\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2}{\|h\|_1} = 0.$$

Кроме этого, имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega_2(u,h)\|_3}{\|h\|_1} = 0.$$

Оператор Немыцкого.

Пусть $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ — это есть полное измеримое $\sigma-$конечное пространство. Дадим определения.

Определение 3. *Функция*

$$f(x, u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

называется Каратеодориевой, если она для всех $u \in \mathbb{R}^N$ $\mu-$*измерима на* Ω *и для* $\mu-$*почти всех* $x \in \Omega$ *непрерывна по* $u \in \mathbb{R}^N$.

Определение 4. *Оператор* $N_f(u) \equiv f(x, u(x))$ *называется оператором Немыцкого.*

Теорема М. А. Красносельского об операторе Немыцкого.

Теорема

Оператор Немыцкого $N_f(u)$ является ограниченным и непрерывным, действующим из

$$\prod_{k=1}^{N} \mathbb{L}^{p_k}(\Omega, \mu) \quad \textit{в} \quad \mathbb{L}^{q}(\Omega, \mu) \quad \textit{при} \quad p_k, q \in [1, +\infty)$$

тогда и только тогда, когда для соответствующей Каратеодориевой функции $f(x, u)$ справедлива оценка

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + c\sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p_k/q}, \quad a(x) \in \mathbb{L}^{q}(\Omega, \mu),$$

для всех $u = (u_1, ..., u_N) \in \mathbb{R}^N$ и $\mu-$почти всех $x \in \Omega$.

Один важный пример.

Пусть

$$f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

является Каратеодориевой функцией. Введем так называемую потенциальную функцию

$$F(x,z) = \int\limits_0^z f(x,\xi)\,d\xi, \tag{9}$$

а также функционал

$$\psi(u) = \int\limits_\Omega F(x,u(x))\,dx. \tag{10}$$

Предположим также, что

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + c|u|^{p/p'} \quad \text{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{и} \quad p \in (1,+\infty),$$

где $a(x) \in \mathbb{L}_+^{p'}(\Omega)$ и $c > 0$.

Один важный пример.

Тогда для потенциальной функции $F(x,u)$, определенной формулой (9), имеет место следующее неравенство:

$$|F(x,u)| \leqslant \left| \int\limits_0^{u(x)} f(x,\xi)\,d\xi \right| \leqslant a(x)|u| + \frac{c}{p}|u|^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{c}{p}|u|^p = a_1(x) + c_1|u|^p, \quad (11)$$

где $a_1(x) \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ и $c_1 > 0$. Очевидно, что по своему определению потенциальная функция $F(x,u)$ является Каратеодориевой и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского и (11) приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_F(u) : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^1(\Omega)$$

и является ограниченным и непрерывным.

Один важный пример.

Следовательно, функционал $\psi(u)$, определенный формулой (10) является ограниченным и непрерывным из $\mathbb{L}^p(\Omega)$ в $\mathbb{R}^1$. Действительно, в силу оценки (11) имеет место цепочка неравенств:

$$|\psi(u)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |F(x, u(x))|\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} a_1(x)\, dx + c_1 \int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx \leqslant c_2 + c_1 \|u\|_p^p.$$

Ограниченность доказана.

Один важный пример.

Докажем непрерывность. Пусть $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$. Тогда

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leqslant \|N_F(u_n) - N_F(u)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(u)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u,v) \equiv \psi(u+v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v\rangle \quad \text{для} \quad u,v \in \mathbb{L}^p(\Omega).$$

$$|\omega(u,v)| \leqslant \left| \int\limits_{\Omega} \left[F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x))\right] dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega} N_f(u)(x)v(x)\,dx \right|.$$

Один важный пример.

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x)) =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} F(x,u(x)+tv(x))\,dt = \int\limits_0^1 f(x,u(x)+tv(x))v(x)\,dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\omega(u,v)| \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_\Omega dx\, |N_f(u+tv)(x) - N_f(u)(x)|\,|v(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'}\, \|v\|_p.$$

Один важный пример.

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p \to 0} \frac{|\omega(u,v)|}{\|v\|_p} \leqslant \lim_{\|v\|_p \to 0} \int\limits_0^1 dt \, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'} = 0.$$

Лемма.

Тем самым, справедлива следующая лемма.

Лемма

При сформулированных условиях функционал $\psi(u)$, *определенный формулой*

$$\psi(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u(x))\, dx, \quad F(x, s) = \int\limits_{0}^{s} f(x, \sigma)\, d\sigma,$$

является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство:

$$\psi_f'(u) = N_f(u) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{при} \quad p \in (1, +\infty). \tag{12}$$

Компактные и вполне непрерывные операторы. Определения

Определение 5. *Оператор $\mathbb{F}$ называется компактным, если для каждого ограниченного множества $\mathrm{B} \subset \mathbb{B}_1$ замыкание множества $\mathbb{F}(\mathrm{B}) \subset \mathbb{B}_2$ компактно в $\mathbb{B}_2$.*

Определение 6. *Оператор $\mathbb{F}$ называется вполне непрерывным, если он непрерывен и компактен.*

Определение 7. *Оператор $\mathbb{F}$ называется полностью непрерывным, если из условия*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1$$

вытекает, что

$$\mathbb{F}(u_n) \to \mathbb{F}(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Связь вполне непрерывных и полностью непрерывных операторов.

Теорема

Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ *— это вполне непрерывный оператор, тогда он является полностью непрерывным.*

Доказательство теоремы 6.

Итак, пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1,$$

тогда эта последовательность сильно ограничена в $\mathbb{B}_1$. Тогда в силу компактности $\mathbb{L}$ из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такую, что

$$\mathbb{L}u_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Рассмотрим транспонированный к $\mathbb{L}$ оператор

$$\mathbb{L}^t : \mathbb{B}_2^* \to \mathbb{B}_1^*.$$

Доказательство теоремы 6.

Поскольку $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, т. е. является линейным и непрерывным, то и $\mathbb{L}^t \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_2^*, \mathbb{B}_1^*)$, причем по определению транспонированного оператора справедливо следующее равенство:

$$\langle f^*, \mathbb{L}u \rangle_2 = \left\langle \mathbb{L}^t f^*, u \right\rangle_1 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{B}_2^*, \quad u \in \mathbb{B}_1.$$

Докажем, что

$$\mathbb{L}u_n \rightharpoonup \mathbb{L}u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Действительно, имеет место следующее выражение:

$$\langle f^*, \mathbb{L}u_n - \mathbb{L}u \rangle_2 = \left\langle \mathbb{L}^t f^*, u_n - u \right\rangle_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Доказательство теоремы 6.

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\mathbb{L}u_n \rightharpoonup \mathbb{L}u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2. \tag{13}$$

Докажем теперь, что на самом деле

$$\mathbb{L}u_n \to \mathbb{L}u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

По доказанному,

$$\mathbb{L}u_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2,$$

значит,

$$\mathbb{L}u_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, в силу (13) приходим к равенству

$$v = \mathbb{L}u.$$

Доказательство теоремы 6.

Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что имеет место неравенство

$$\|\mathbb{L}u_{n_k} - \mathbb{L}u\|_2 \geqslant c > 0 \quad \text{для всех} \quad n_k \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, по доказанному, у этой подпоследовательности найдется такая подпоследовательность

$$\left\{u_{n_{k_l}}\right\} \subset \{u_{n_k}\}$$

такая, что

$$\left\|\mathbb{L}u_{n_{k_l}} - \mathbb{L}u\right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad l \to +\infty.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$0 < c \leqslant \|\mathbb{L}u_{n_k} - \mathbb{L}u\|_2 \leqslant \left\|\mathbb{L}u_{n_k} - \mathbb{L}u_{n_{k_l}}\right\|_2 + \left\|\mathbb{L}u_{n_{k_l}} - \mathbb{L}u\right\|_2.$$

Доказательство теоремы 6.

Выберем теперь $l \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\| \mathbb{L} u_{n_{k_l}} - \mathbb{L} u \right\|_2 \leqslant \frac{c}{2}.$$

С другой стороны, для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется такое $n_k \in \mathbb{N}$, что

$$n_k = n_{k_l} \Rightarrow u_{n_k} = u_{n_{k_l}} \Rightarrow \mathbb{L} u_{n_{k_l}} = \mathbb{L} u_{n_k}$$

и тогда

$$\left\| \mathbb{L} u_{n_k} - \mathbb{L} u_{n_{k_l}} \right\|_2 = 0$$

и мы приходим к противоречивому неравенству

$$0 < c \leqslant \frac{c}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Важный результат.

Важный результат без доказательства.

Теорема

Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ *и* $\mathbb{B}_1$ *рефлексивно. Тогда для полной непрерывности оператора* $\mathbb{L}$, *необходима и достаточна, вполне непрерывность оператора* $\mathbb{L}$.

Нелинейный случай.

Пока мы рассмотрели связь полной непрерывности и вполне непрерывности линейных операторов. Однако, есть некоторые результаты и для нелинейных операторов. Справедлива следующая лемма.

Лемма

Пусть

$$\mathbb{K} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

— это полностью непрерывный оператор. Тогда при условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ *оператор* $\mathbb{K}$ *является вполне непрерывным.*

Пример 7.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. ПРИМЕР 7. Пусть $\mathbb{B}_1 = \mathbb{L}^2(0,1)$ и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{R}_1$. Рассмотрим следующий нелинейный оператор

$$\mathbb{K}(u) = \int\limits_0^1 u^2(s)\,ds = \|u\|_2^2.$$

Докажем, что он является вполне непрерывным. Сначала докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^2(0,1),$$

но тогда в силу очевидного неравенства

$$|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leqslant \|u_n - u\|_2$$

приходим к выводу о том, что

$$\|u_n\|_2 \to \|u\|_2 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

Пример 7.

поэтому

$$\mathbb{K}(u_n) \to \mathbb{K}(u) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем теперь компактность оператора $\mathbb{K}$. Пусть $\mathrm{D} \subset \mathbb{L}^2(0,1)$ — это произвольное ограниченное множество. Докажем, что

$$\overline{\mathbb{K}(\mathrm{D})} \quad \text{компактно в} \quad \mathbb{R}^1.$$

Но для этого достаточно доказать, что $\mathbb{K}(\mathrm{D})$ — это ограниченное множество. В силу ограниченности D в $\mathbb{L}^2(0,1)$ имеем следующее неравенство:

$$\|u\|_2 \leqslant c \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}$$

при некотором $c > 0$, не зависящем от u. Тогда

$$0 < \mathbb{K}(u) \leqslant c^2 < +\infty.$$

Тем самым, компактность оператора $\mathbb{K}$ доказана.

Пример 7.

Теперь докажем, что, тем не менее, оператор $\mathbb{K}$ не является полностью непрерывным. Действительно, рассмотрим последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{L}^2(0,1)$, где

$$u_n(s) = \sin(\pi n s), \quad s \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любой фиксированной функции $v(s) \in \mathbb{L}^2(0,1)$ в силу теоремы Римана–Лебега имеет место выражение

$$\int\limits_0^1 v(s)\sin(\pi n s)\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е. в силу теоремы представления Рисса

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,1).$$

$$\mathbb{K}(u_n) = \int\limits_0^1 u_n^2(s)\,ds = \frac{1}{2} \not\to 0 = \mathbb{K}(0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$