Лекция 8. Вариационные методы. Метод глобального расслоения С. И. Похожаева.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

26 октября 2011 г.

Введение.

В этом параграфе мы рассмотрим метод глобального расслоения С. И. Похожаева, который позволяет сопоставить исходной нелинейной задаче с однородными нелинейностями, т. е. с такими, что $\mathrm{A}(au) = a^{\alpha}\mathrm{A}(u)$, некоторую вариационную задачу на условный экстремум. Действительно, довольно часто функционал Эйлера $\psi(u)$, соответствующий исходной задаче в некотором банаховом пространстве, может не быть ограниченным не снизу не сверху. Однако, метод глобального расслоения С. И. Похожаева позволяет сопоставить исходной задаче новый функционал $\mathcal{F}(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ и некоторое многообразие $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ таким образом, чтобы функционал $\mathcal{F}(u)$ был ограничен снизу на $\mathcal{V}$. После чего можно воспользоваться теорией категорий Люстерника–Шнирельмана.

Постановка задачи.

Рассмотрим следующую задачу о собственных колебаниях:

$$\begin{cases} \triangle u + |u|^{p-2}u = 0, & \text{при} \quad x \in \Omega; \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω — это ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$. Пусть, кроме того, $p \in (2, 2^*)$:

$$2^* = \begin{cases} 2N/(N-2), & \text{при} \quad N \geqslant 3; \\ +\infty, & \text{при} \quad N = 1, 2. \end{cases} \tag{2}$$

Функционал Эйлера-1.

Сопоставим краевой задаче (1) функционал Эйлера:

$$\psi(u) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx, \tag{3}$$

где функционал рассматривается на банаховом пространстве $\mathbb{B} = \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Давайте докажем, что функционал $\psi(u)$ является неограниченным на $\mathbb{B}$. Действительно, для доказательства неограниченности снизу возьмем в качестве $u \in \mathbb{B}$ величину $u = tv$, где $t > 0$ и $v \in \mathbb{B}$. Тогда получим следующее равенство:

$$\psi(u) = \psi(tv) = \frac{1}{2}t^2\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dx - \frac{1}{p}t^p\int\limits_{\Omega} |v|^p\,dx \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

поскольку $p > 2$.

Функционал Эйлера-2.

Докажем теперь неограниченность сверху. Для этого возьмем в качестве u величину

$$u = \frac{v}{\|\nabla v\|_2},$$

тогда после подстановки в (3) получим

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dx\right)^{1/2} - \frac{1}{p}\frac{\|v\|_p^p}{\|\nabla v\|_2^p},$$

но в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место неравенство

$$\|v\|_p \leqslant c_1 \|\nabla v\|_2 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Функционал Эйлера-3.

Отсюда вытекает оценка сверху

$$\frac{\|v\|_p^p}{\|\nabla v\|_2^p} \leqslant c_1^p,$$

т. е. получили следующую оценку снизу для функционала $\psi(u)$:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2 - \frac{c_1^p}{p} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|\nabla v\|_2 \to +\infty.$$

Таким образом, функционал $\psi(u)$ является неограниченным на $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Метод расслоения.

Теперь мы на примере задачи (1) опишем метод глобального расслоения С. И. Похожаева. Действительно, представим функцию $u \in \mathbb{B}$ в виде $u = tv$, где $t \in \mathbb{R}^1$ и $v \in \mathbb{B} = \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Тогда введем новый функционал

$$\psi_1(t, v) \equiv \psi(tv) : \mathbb{F} \equiv \mathbb{R}^1 \times \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}^1,$$

причем пространство $\mathbb{F}$ является банаховым относительно стандартной нормы

$$\|w\|_1 = \|(t, v)\|_1 = |t| + \|v\|,$$

где символом $\|\cdot\|$ обозначена норма в банаховом пространстве $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$.

Новый параметр.

Это существенно важный момент!!! Вводится новый параметр $t \in \mathbb{R}^1$ и поэтому можно потребовать выполнения некоторого дополнительного условия, т. е., например, потребовать, чтобы решение задачи принадлежало следующему многообразию:

$$\mathcal{V} \equiv \{w = (t, v) \in \mathbb{F} : \ \varphi(w) = c, \} \tag{4}$$

где $c \in \mathbb{R}^1$, $\varphi(w) : \mathbb{F} \to \mathbb{R}^1$. И теперь мы можем рассматривать функционал $\psi_1(w)$ на многообразии $\mathcal{V}$.

Наша задача.

Для задачи (1) в качестве функционала $\varphi(w)$ удобно взять норму банахова пространства $\mathbb{B} = \mathbb{H}^1_0(\Omega)$:

$$\mathcal{V} \equiv \{w = (t, v) \in \mathbb{F} : \ \varphi(t, v) = \|\nabla v\|_2 = 1\}, \tag{5}$$

т. е. пересечение многообразия $\mathcal{V} \subset \mathbb{F}$ с банаховым пространством является единичной сферой в банаховом пространстве $\mathbb{B}$

$$\mathbb{S} \equiv \{v \in \mathbb{B} : \ \|\nabla v\|_2 = 1\}. \tag{6}$$

Дифференцируемость по Фреше.

Для дальнейшего нам необходимо получить явное выражение для производной Фреше произвольного функционала $F(t,v) : \mathbb{F} \to \mathbb{R}^1$ класса $\mathbb{C}^1$. Действительно, имеет место равенства

$$F(t+\tau, v+h) = F(t,v) + \frac{\partial F}{\partial t}\tau + \left\langle F'_{vf}(t,v), h \right\rangle + \omega((t,v),(\tau,h)),$$

причем

$$\lim_{|\tau|+\|h\|\to+\infty} \frac{\omega((t,v),(\tau,h))}{|\tau| + \|h\|} = 0.$$

Следовательно, производная Фреше функционала F имеет вид

$$F'_f(w) = \left(\frac{\partial F(w)}{\partial t}, F'_{vf}(w)\right) \quad \text{для всех} \quad w = (t,v) \in \mathbb{F}. \qquad (7)$$

Многообразие-1.

Как нам уже известно, необходимым условием существования критической точки у функционала F относительно многообразия $\mathcal{V}$ — это следующее равенство

$$\left\| F'_f(w) \right\|_* (\mathrm{T}_w \mathcal{V}) = 0 \quad \text{при} \quad w \in \mathcal{V}. \tag{8}$$

Прежде всего выясним явный вид касательного пространства $\mathrm{T}_w \mathcal{V}$. Заметим, что это пространство определено в каждой точке многообразия $\mathcal{V}$, поскольку в каждой точке имеет место

$$\varphi'_f(w) \neq \theta \in \mathbb{F}^* \equiv \mathbb{R}^1 \times \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Действительно, в силу (7) призводная Фреше имеет следующий вид:

$$\varphi'_f(w) = (0, -\triangle v) \quad \text{для всех} \quad w = (t, v) \in \mathcal{V}.$$

Многообразие-2.

Предположим, что в некоторой точке $w_0 = (t_0, v_0) \in \mathcal{V}$ имеет место равенство

$$\varphi_f^{'}(w_0) = \theta \in \mathbb{F}^*.$$

Отсюда сразу же вытекает, что

$$-\triangle v_0 = 0 \Rightarrow \langle -\triangle v_0, v_0 \rangle = \|v_0\|^2 = 0 \Rightarrow v_0 = 0,$$

но тогда $\varphi(w_0) = 0$, что противоречит условию, что $\varphi(w_0) = 1$. Касательное пространство $\mathrm{T}_w\mathcal{V}$ согласно определению имеет следующий вид:

$$\mathrm{T}_w\mathcal{V} \equiv \left\{ z = (\tau, h) \in \mathbb{F} : \left\langle \left\langle \varphi_f^{'}(w), z \right\rangle \right\rangle = \frac{\partial \varphi(w)}{\partial t} \tau + \left\langle \varphi_{vf}^{'}(w), h \right\rangle = 0 \right\}$$

где $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ — это скобки двойственности между $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^*$.

Многообразие-3.

Но согласно определению (6) многообразия $\mathcal{V}$ имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial\varphi(w)}{\partial t} = 0, \quad \varphi'_{vf}(w) = -\triangle v \quad \text{для всех} \quad w = (t, v) \in \mathcal{V}.$$

Поэтому приходим к формуле

$$\mathrm{T}_w\mathcal{V} = \mathbb{R}^1 \oplus \mathrm{T}_v\mathbb{S} \quad \text{для всех} \quad w = (t, v) \in \mathcal{V}, \tag{9}$$

где $\mathbb{S}$ определено формулой (6).
Теперь займемся изучением равенства

$$\left\|\psi'_f(w)\right\|_* (\mathrm{T}_w\mathcal{V}) = 0, \tag{10}$$

которое является необходимым условием экстремали в точке $w \in \mathcal{V}$ функционала $\psi(w)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$.

Многообразие-4.

Действительно, согласно определению полунормы

$$\|\cdot\|_* \left(\mathrm{T}_w \mathcal{V}\right)$$

имеет место равенство

$$\left\|\psi_f'(w)\right\|_* \left(\mathrm{T}_w \mathcal{V}\right) = \sup_{z=(\tau,h)\in \mathrm{T}_w\mathcal{V}, \|z\|_1 \leqslant 1} \left|\left\langle\left\langle \psi_{1f}'(w), z\right\rangle\right\rangle\right| =$$

$$= \sup_{z=(\tau,h)\in \mathrm{T}_w\mathcal{V}, \|z\|_1 \leqslant 1} \left|\frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t}\tau + \left\langle \psi_{1vf}'(w), h\right\rangle\right| =$$

$$= \sup_{|\tau|+\|h\|\leqslant 1,\ \tau\in\mathbb{R}^1,\ h\in \mathrm{T}_v\mathbb{S}} \left|\frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t}\tau + \left\langle \psi_{1vf}'(w), h\right\rangle\right|.$$

Но тогда равенство (10) равносильно следующим двум равенствам:

$$\left.\frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t}\right|_{v\in\mathbb{S}} = 0, \quad \|\psi_{1vf}'(w)\|_* \left(\mathrm{T}_v\mathbb{S}\right) = 0 \quad \text{для всех} \quad t\in\mathbb{R}^1. \tag{11}$$

Эти два равенства являются необходимыми условиями существования условно критической точки функционала $\psi_1(w)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$. Теперь заметим, что в нашей задаче

$$\psi_1(t, v)\Big|_{v\in\mathbb{S}} = \frac{t^2}{2} - \frac{|t|^p}{p} \int\limits_{\Omega} |v|^p\, dx.$$

Следовательно,

$$0 = \frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t}\Big|_{v\in\mathbb{S}} \Rightarrow t - t|t|^{p-2} \int\limits_{\Omega} |v|^p\, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(v) = \pm \left(\int\limits_{\Omega} |v|^p\, dx \right)^{-1/(p-2)}.$$

Функционал.

Но тогда в силу того, что второе равенство из (11) выполнено для всех $t \in \mathbb{R}^1$ мы можем ввести новый функционал по формуле

$$\mathcal{F}(v) \equiv \psi_1(t(v), v)\Big|_{v \in \mathbb{S}} = \frac{p-2}{2p} \left(\int\limits_{\Omega} |v|^p \, dx \right)^{-2/(p-2)}, \qquad (12)$$

который рассматривается на многообразии $\mathbb{S}$, определенному формулой (6). Действительно, в силу цепного правила дифференцирования по Фреше имеет место равенство

$$\mathcal{F}'_f(v) = \frac{\partial \psi_1(t(v), v)}{\partial t} t'_f(v) + \psi'_{1vf} = \psi'_{1vf} \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{S},$$

здесь мы воспользовались первым равенством из формулы (11).

Эквивалентная задача.

Но тогда второе равенство из формулы (11) эквивалентно следующему равенству:

$$\|\psi'_{1vf}(w)\|_*\,(\mathrm{T}_v\mathbb{S}) = \|\mathcal{F}'_f(v)\|_*\,(\mathrm{T}_v\mathbb{S}) = 0 \quad \text{при} \quad t = t(v),\ v \in \mathbb{S}.$$

Следовательно, задача отыскания условного экстремума функционала $\psi_1(t,v)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$ в банаховом пространстве $\mathbb{F} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ эквивалентна задаче отыскания условного экстремума функционала $\mathcal{F}(v)$ относительно единичной сферы $\mathbb{S}$ банахова пространства $\mathbb{B} = \mathbb{H}^1_0(\Omega)$.

Метод Люстерника–Шнирельмана.

Для полученной задачи отыскания условно критических точек функционала $\mathcal{F}(v)$ относительно единичной сферы $\mathbb{S}$ банахова пространства $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в силу четности функционалов $\varphi(v)$ и $\mathcal{F}(v)$ уже можно применить теорию категорий Люстерника–Шнирельмана. Давайте сейчас приступим к этой работе.

Прежде всего докажем, что функционал $\mathcal{F}$ ограничен снизу на единичной сфере $\mathbb{S}$. Действительно, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место следующее неравенство:

$$\|v\|_p \leqslant c_1 \|\nabla v\|_2, \quad p \in (2, 2^*).$$

Так что

$$\int\limits_{\Omega} |v|^p \, dx \leqslant c_1^p \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{p/2} = c_1^p,$$

поскольку $v \in \mathbb{S}$.

Задача.

Таким образом, приходим к оценке снизу для функционала $\mathcal{F}(v)$:

$$\mathcal{F}(v) \geqslant \frac{p-2}{2p}\frac{1}{c_1^{2p/(p-2)}} > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{S}. \tag{13}$$

Теперь проверим, что функционал $\mathcal{F}(v)$ удовлетворяет на единичной сфере $\mathbb{S}$ условию (PS_c) при всех

$$c \geqslant \inf_{v\in\mathbb{S}} \mathcal{F}(v).$$

Действительно, пусть $\{v_n\} \subset \mathbb{S}$ — это произвольная последовательность такая, что имеют место условия

$$\mathcal{F}(v_n) \to c \quad \text{и} \quad \left\|\mathcal{F}'_f(v_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{v_n}\mathbb{S}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{14}$$

Условие Пале–Смейла-1.

Заметим, что поскольку $\{v_n\} \subset \mathbb{S}$, то эта последовательность ограничена в $\mathbb{B}$ и поэтому у нее в силу рефлексивности $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ существует подпоследовательность $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ такая, что

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Отметим, что в частности $v \in \mathbb{S}$, поскольку единичная сфера вещественного гильбертова пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ слабо компактна.

Из вполне непрерывности вложения

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{при} \quad p \in (2, 2^*)$$

имеем

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Условие Пале–Смейла-2.

В частности,

$$\|v_{n_k}\|_p \to \|v\|_p \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

В силу первого условия $(\mathrm{PS_c})$ приходим к выводу, что

$$\mathcal{F}(v_n) \leqslant K \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

где $K \in (0, +\infty)$ и не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Поэтому приходим к выводу, что

$$\|v\|_p \neq 0, \tag{15}$$

и, значит,

$$\mathcal{F}(v_{n_k}) \to \mathcal{F}(v) \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Для сокращения громоздкости выкладок обозначим найденную подпоследовательность $\{v_{n_k}\}$ снова через $\{v_n\}$.

Условие Пале–Смейла-3.

Для того, чтобы воспользоваться вторым условием из $(\mathrm{PS_c})$ найдем производную Фреше функционала $\mathcal{F}(v)$. Действительно,

$$\mathcal{F}(v) \equiv \psi_1(t(v), v) = \frac{p-2}{2p}\left(\int\limits_{\Omega} |v|^p\, dx\right)^{-2/(p-2)},$$

$$\mathcal{F}'_f(v) = -\left(\int\limits_{\Omega} |v|^p\, dx\right)^{-p/(p-2)} |v|^{p-2}v. \tag{16}$$

Производная Фреше функционала $\varphi(v) = \|\nabla v\|_2^2$ вычисляется элементарно:

$$\varphi'_f(v) = -\triangle v. \tag{17}$$

Условие Пале–Смейла-4.

Теперь перепишем второе условие из (14). Действительно, справедлива цепочка выражений

$$\left\|\mathcal{F}_f'(v_n)\right\|_*(\mathrm{T}_{v_n}\mathbb{S}) = \inf_{\mu\in\mathbb{R}^1}\left\|\mathcal{F}_f'(v_n)+\mu\varphi_f'(v_n)\right\|_* =$$

$$= \left\|\mathcal{F}_f'(v_n)+\mu_n\varphi_f'(v_n)\right\|_* = \sup_{z\in\mathbb{B},\ \|z\|\leqslant 1}\left|\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n)+\mu_n\varphi_f'(v_n), z\right\rangle\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n)+\mu_n\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle\right| = \left|\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), v_n\right\rangle + \mu_n\left\langle\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle\right|.$$

Отдельно вычислим выражения

$$\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), v_n\right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle.$$

Действительно,

$$\left\langle\mathcal{F}_f'(v_n), v_n\right\rangle = -\left(\int\limits_\Omega |v_n|^p\,dx\right)^{-2/(p-2)}, \quad \left\langle\varphi_f'(v_n), v_n\right\rangle = \varphi(v_n).$$

Условие Пале–Смейла-5.

Теперь выберем $\{\mu_n\} \subset \mathbb{R}^1_+$ таким образом, чтобы

$$\left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n \right\rangle + \mu_n \left\langle \varphi'_f(v_n), v_n \right\rangle = 0,$$

тогда получим, что

$$\mu_n = \left(\int\limits_\Omega |v_n|^p \, dx \right)^{-2/(p-2)}.$$

Но тогда для таких $\{\mu_n\}$ в силу второго условия из (14) получим предельную формулу

$$\mathrm{I}_n \equiv \left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), z \right\rangle + \mu_n \left\langle \varphi'_f(v_n), z \right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad (18)$$

Условие Пале–Смейла-6.

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} \left|\mathcal{F}'_f(v_n)\right|^{p'} \, dx = \mu_n \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Поэтому последовательность $\{\mathcal{F}'_f(v_n)\}$ ограничена в $\mathbb{L}^{p'}(\Omega)$. С другой стороны, имеет место следующая цепочка плотных и непрерывных вложений:

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^p(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Поэтому в силу теоремы 3 второй лекции первого тома имеет место равенство

$$\left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), w \right\rangle = \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}'_f(v_n)(x) w(x) \, dx \quad \text{для всех} \quad w(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \tag{19}$$

Условие Пале–Смейла-7.

Ранее мы доказали, что

$$v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega),$$

тогда в силу ограниченности $\{\mathcal{F}'_f(v_n)\}$ в $\mathbb{L}^{p'}(\Omega)$ из (19) приходим к выводу, что

$$\left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n - v \right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{20}$$

С другой стороны, в силу слабой сходимости $\{v_n\}$ к v в $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ приходим к выводу, что

$$\left\langle \varphi'_f(v), v_n - v \right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \tag{21}$$

поскольку $\varphi'_f(v) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Условие Пале–Смейла-8.

Теперь из выражения (18) можно получить следующее равенство:

$$\mu_n \left\langle \varphi'_f(v_n) - \varphi'_f(v), v_n - v \right\rangle =$$

$$= \mathrm{I}_n - \left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n - v \right\rangle - \mu_n \left\langle \varphi'_f(v), v_n - v \right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

которое вытекает из предельных формул (18), (20) и (21). С другой стороны, по доказанному

$$\mu_n \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{при достаточно большом} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Итак,

$$\left\langle \varphi'_f(v_n) - \varphi'_f(v), v_n - v \right\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla v_n - \nabla v|^2 \, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е.

$$v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Категория-1.

Таким образом, функционал $\mathcal{F}(v)$ удовлетворяет условию (PS_c) относительно единичной сферы $\mathbb{S}$ для всех

$$c \geqslant \inf_{v\in\mathbb{S}} \mathcal{F}(v) > 0.$$

Заметим, что функционалы $\mathcal{F}(v)$ и $\varphi(v)$ четные. Поэтому мы можем отождествить диаметрально противоположные точки единичной сферы $\mathbb{S}$. Введем банахово пространство

$$\mathbb{X} = \left\{x = [v, -v] : \ v \in \mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)\right\},$$

функционалы $\mathcal{F}_1(x) \equiv \mathcal{F}(v)$ и $\varphi_1(x) \equiv \varphi(v)$, и многообразие

$$\mathcal{V}_1 \equiv \{x \in \mathbb{X} : \ \varphi_1(x) = 1\}.$$

Но многообразие $\mathcal{V}_1$ является бесконечномерным проективным пространством $\mathbb{P}^\infty$, поэтому

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}_1}(\mathcal{V}_1) = +\infty.$$

Категория-2.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{F}_1^{d_n} \equiv \{x \in \mathcal{V}_1 : \mathcal{F}_1(x) \leqslant d_n\}, \quad d_n \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Заметим, что

$$\mathcal{V}_1 = \operatorname*{induct}_{n \to +\infty} \mathcal{F}_1^{d_n}.$$

Значит,

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathcal{F}_1^{d_n}\right) = +\infty.$$

Теорема.

Теорема

Функционал $\mathcal{F}(v)$ *имеет не менее, чем счетное множество условно критических, геометрически разных точек* $\{v_n\} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ *относительно единичной сферы* $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, *причем для соответствующих собственных значений* $\{\lambda_n\}$ *справедлива минимаксная формулировка*:

$$\lambda_n = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_n} \sup_{v \in \mathcal{A}} \left(\int\limits_{\Omega} |v|^p \, dx \right)^{-2/(p-2)}, \quad \mathcal{A}_n \equiv \{\mathcal{A} \subset \mathbb{S} : \ \operatorname{cat}_{\mathbb{S}}(\mathcal{A}) \geqslant n\},$$

причем $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ *и, кроме того,* $\mathcal{A} = -\mathcal{A}$. *Наконец, справедлива предельная формула*

$$\int\limits_{\Omega} |v_n|^p \, dx = \frac{1}{\lambda_n^{(p-2)/2}} \searrow 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Критические точки-1.

Теперь наша задача заключается в том, чтобы доказать, что последовательность $\{u_k\} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ при $u_k = t(v_k)v_k$ является последовательностью критических точек функционала $\psi(u)$. Действительно, по доказанному точки v_k удовлетворяют равенству

$$\psi_{1fv}^{'}(t_k, v_k) - \mu_k \varphi_f^{'} v(t_k, v_k) = \theta \in \mathbb{B}^*, \quad \text{где} \quad t_k = t(v_k). \quad (22)$$

Умножим «скалярно» равенство (22) на v_k относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и получим равенство

$$\left\langle \psi_{1fv}^{'}(w_k), v_k \right\rangle = \mu_k \left\langle \varphi_f^{'}(w_k), v_k \right\rangle . \quad (23)$$

Критические точки-2.

Заметим, что имеет место следующее цепочка равенств:

$$\left\langle \psi'_{1fv}(w_k), v_k \right\rangle = t_k \left\langle \psi'_f(u_k), v_k \right\rangle = t_k \frac{\partial \psi_1(t_k, v_k)}{\partial t} = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу равенства (11). Но тогда из (23) вытекает, что

$$\mu_k \left\langle \varphi'_f(w_k), v_k \right\rangle = 0,$$

но поскольку по построению

$$\left\langle \varphi'_f(w_k), v_k \right\rangle \neq 0 \Rightarrow \mu_k = 0.$$

Отсюда в силу (22) вытекает равенство

$$\psi'_{1fv}(t_k, v_k) = \theta \in \mathbb{B}^* \Rightarrow \theta = \psi'_{1fv}(t_k, v_k) = t_k \psi'_f(u_k).$$

Следовательно, $u_k = t(v_k) v_k$ — это критические точки функционала $\psi(u)$ на банаховом пространстве $\mathbb{B} = \mathbb{H}^1_0(\Omega)$.

Наша задача.

Таким образом, исходная краевая задача (1) имеет по меньшей мере счетное множество геометрически разных собственных функций вида $u_k = t(v_k)v_k$, где $\|v_k\| = 1$.