ВОПРОСЫ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
II семестр

1. Функции ограниченной вариации. Интеграл Римана—Стилтьеса

1. Определение пространства ограниченной вариации.

2. Доказать, что функции ограниченной вариации образуют линейное пространство.

3. Доказать, что монотонная на отрезке $[a;b]$ функция имеет ограниченную вариацию на этом отрезке.

4. Доказать, что $BV[a;b] \subset BV[a;c] \cap BV[c;b]$ (где $a < c < b$), причём $\forall f \in BV[a;b]$ верно равенство $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

5. Доказать, что всякая функция ограниченной вариации есть разность двух монотонных.

6. Определение интеграла Римана—Стилтьеса.

7. Теорема о существовании и оценке интеграла Римана—Стилтьеса $I = \int_a^b f(x)\,dg(x)$.

8. Теорема об интегрировании по частям в интеграле Римана—Стилтьеса.

9. Свойства интеграла Римана—Стилтьеса (без доказательства).

10. Теорема Хелли (без доказательства).

11. Линейные функционалы над $C[a;b]$.

12. Теорема Рисса (без доказательства).

13. Пространство $\widehat{BV}[a;b]$ и его свойства (без доказательства).

2. Пространство абсолютно непрерывных функций и пространства Гёльдера

1. Абсолютно непрерывные функции (первое определение).

2. Связь абсолютно непрерывной функции с интегралом Лебега (без доказательства).

3. Связь пространств функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций.

4. Формула интегрирования по частям для абсолютно непрерывных функций.

5. Функция-«шапочка».

6. Срезка и лемма об L^1-норме.

7. Теорема о связи полной вариации и L^1-нормы производной абсолютно непрерывной функции.

8. Нормировка пространства $\mathbb{AC}[a,b]$.

9. Основная лемма вариационного исчисления.

10. Пространства $C^k(\overline{\Omega})$, $C^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ (определение и нормировка).

11. Интерполяционное неравенство для $[f]_\delta$.

12. Теорема о вложении пространств Гёльдера.

13. Параболические пространства $C^{1,2}(\overline{\Omega})$, $C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{\Omega})$ и их нормы.

14. Теорема о полноте пространств $C^{1,2}(\overline{\Omega})$ и $C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{\Omega})$.

15. Интерполяционное неравенство для $[f]_{\delta/2,\delta}$.

16. Теорема об интерполяции вложении пространств Гёльдера.

3. Пространства Лебега. Продолжение

1. Связь L^p и L^q-норм при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ (с условием на пространство!).

2. Интерполяционная лемма (оценка норм и вложение).

3. Обобщённое неравенство Гёльдера.

4. Пусть $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказать, что любая функция $g \in L^q(X)$ задаёт непрерывный линейный функционал Φ_g, действующий на $L^p(X)$, причём $\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q$.

5. Тот же вопрос для $p = 1$.

6. Теорема Радона—Никодима (без доказательства).

7. Доказать, что все остальные функционалы на $L^p(X)$, $p > 1$, однозначно представляются в виде $\int_X f(x)g(x)\,d\mu$.

8. Тот же вопрос для $p = 1$.

9. Сильная и слабая сходимости в $L^p(X)$ (определение).

4. Слабая, $*$-слабая и сильная сходимости

1. Определения сильной и слабой сходимости в произвольном банаховом пространстве B, а также в пространствах Лебега.

2. Определение $*$-слабой сходимости в пространстве, сопряжённом к пространству B.

3. Определение дважды сопряжённого пространства.

4. Теорема о свойстве слабой и $*$-слабой сходимости (оценка нормы слабого предела). Её применение к пространствам Лебега.

5. Определение рефлексивного банахова пространства.

6. Определение сепарабельного банахова пространства.

7. Критерии слабой и $*$-слабой сходимости. Их применения к пространствам Лебега.

8. Определение равномерно выпуклого банахова пространства. Теорема о его рефлексивности.

9. Критерий сильной сходимости в равномерно выпуклом банаховом пространстве. Его применение к пространствам Лебега.

5. Пространства основных и обобщённых функций

1. Семейство компактов, компактно исчерпывающих $\mathbb{R}^N$.

2. Носитель функции (определение).

3. Система полунорм на пространстве $\mathcal{D}(K)$.

4. База окрестностей нуля в $\mathcal{D}(K)$.

5. Метризация счётно-нормированного пространства.

6. Доказательство полноты метрического пространства $\mathcal{D}(K)$, построенного с помощью метризации из предыдущего вопроса.

7. Построение пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

8. Теорема об основных свойствах пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

9. Пространство быстроубывающих функций: полунормы, база окрестностей нуля, метризация.

10. Теорема о свойствах пространства быстро убывающих функций.

11. Пространство распределений (обобщённых функций) $\mathcal{D}'$.

12. Критерий непрерывности функционала из $\mathcal{D}'$ в терминах последовательностей (без доказательства).

13. Критерий непрерывности функционала из $\mathcal{D}'$ в терминах полунорм.

14. Сильная и слабая топологизации $\mathcal{D}'$.

15. Регулярные и сингулярные обобщённые функции: определение.

16. Лемма Дюбуа—Раймонда.

17. Примеры: дельта-функция.

18. Примеры: тета-функция; постоянная.

19. Примеры: $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ (с доказательством непрерывности и сингулярности).

6. Пространства обобщённых функций, продолжение

1. Теорема о локальном представлении произвольного распределения из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

2. Теорема о представлении обобщённой функцииив $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем.

3. Теорема о представлении обобщённой функции, носитель которой состоит из одной точки.

4. Понятие свёртки обобщённой и основной функции: эвристические соображения, определение.

7. Преобразование Фурье

1. Полунормы в пространстве $\mathcal{P}$.

2. Критерии непрерывности функционалов над пространством $\mathcal{P}$ (без доказательства): секвенциальная непрерывность; 2) ограниченность.

3. Критерий непрерывности функционалов над пространством $\mathcal{P}$ в терминах полунорм.

4. $*$- слабая и сильная топологии в $\mathcal{P}'$.

5. Прямое и обратное преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{P}$.

6. Теорема о непрерывности преобразований Фурье в исходной топологии пространства $\mathcal{P}$.

7. Теорема о взаимной обратности преобразований Фурье.

8. Свёртка функций из $\mathcal{P}$ и замкнутость этого пространства относительно операции свёртки.

9. Преобразование Фурье обобщённых функций: мотивировка и определение.

10. Теорема о непрерывности преобразования Фурье обобщённых функций.

11. Фундаментальные решения в пространстве $\mathcal{D}'$: определение, пример фундаментального решения волнового уравнения.

8. Слабая и сильная производные

1. Определение слабой производной. Лемма об эквивалентности.
2. Примеры (существование и отсутствие слабой производной).
3. Определение сильной производной.
4. Теорема о связи определений.
5. Лемма о производной произведения.
6. Лемма о производной сложной функции.

9. Пространства Соболева: определения и непрерывные вложения

1. Определение пространств Соболева $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$.

2. Теорема о вложении $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{p^*}(\Omega)$ и $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right)$, включая оценки норм (в каком случае имеет место какое вложение?).

3. Теорема о вложении $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{Np/(N-kp)}(\Omega)$ и $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^m(\overline{\Omega})$ (в каком случае имеет место какое вложение?).

4. Теорема о вложении $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega)$.