ЛЕКЦИЯ 0а

Элементы теории множеств

1. Понятие множества

Мы не будем здесь формулировать аксиомы теории множеств. Интересующие могут обратиться, например, к 1 тому курса «Математический анализ» В. А. Зорича. Для нас будет важно следующее:

1) множества задаются своими элементами, т. е. множество задано, если указано, какие элементы ему принадлежат; при этом множества считаются равными тогда и только тогда, когда они содержат ровно одни и те же элементы; сами множества могут служить элементами других множеств; определено пустое множество $\varnothing$, не содержащее никаких элементов (в силу вышесказанного оно единственно);

2) если A — множество, $P(x)$ — свойство, то можно построить подмножество

$$B \equiv \{x \in A \mid P(x)\},$$

состоящее ровно из тех элементов множества A, для которых выполнено свойство P;

3) для любого множества X определено множество $P(X)$, состоящее из всех его подмножеств;

4) существуют бесконечные множества.

Кроме того, для любых двух множеств A, B можно построить их объединение, пересечение, разность и симметрическую разность соответственно по правилам

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$
$$A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A \triangle B \equiv \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\},$$

где $\vee$ — логическое «или» (неисключающее!), $\wedge$ — логическое «и», $\neg$ — логическое «не». Для простоты приведём также словесные формулировки:

объединение множеств содержит ровно те элементы, которые принадлежат *хотя бы одному* из объединяемых множеств,

пересечение множеств содержит ровно те элементы, которые принадлежат *всем* пересекаемым множествам,

разность множеств A, B содержит ровно те элементы, которые *принадлежат A и не принадлежат B*,

симметрическая разность множеств A, B содержит ровно те элементы, которые принадлежат *ровно одному* из множеств A и B.

Отметим, что для симметрической разности возможны такие представления:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Отметим также, что объединение и пересечение произвольного (не обязательно конечного!) семейства множеств определяются аналогично.

Также существует понятие **декартова произведения** множеств. Именно, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$. Это определение легко обобщается на счётную последовательность множеств (как?).

На практике часто встречаются семейства множеств, являющихся подножествами некоторого множества P. (Например, некоторые множества точек на плоскости, некоторые множества числовых функций и т. п.) В этом случае бывают полезны **формулы де Моргана**

$$P \setminus \cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \cap_{\alpha\in\Gamma}(P \setminus A_\alpha), \tag{1}$$

$$P \setminus \cap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \cup_{\alpha\in\Gamma}(P \setminus A_\alpha). \tag{2}$$

Проверим формулу (1). Вообще, для доказательства равенства множеств $A = B$ достаточно доказать, что выполняются вложения $A \subset B$ и $B \subset A$. Пусть $x \in P \setminus \cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$. Это означает по определению разности множеств, что x входит (синоним слова «принадлежит») в P, но не входит в $\cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$. Тогда по определению объединения множеств x не входит ни в одно из множеств A_α. Но тогда $x \in P \setminus A_\alpha$ при всех $\alpha \in \Gamma$ и по определению пересечения $x \in \cap_{\alpha\in\Gamma}(P \setminus A_\alpha)$. Докажем теперь обратное вложение. Если $x \in \cap_{\alpha\in\Gamma}(P \setminus A_\alpha)$, то x принадлежит всем множествам $P \setminus A_\alpha$, откуда следует, что $x \in P$, но ни при каком $\alpha \in \Gamma$ элемент x не содержится в A_α. Но тогда $x \notin \cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ и $x \in P \setminus \cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$. Отметим, что из нашего рассуждения следует, что если одно из множеств в (1) пусто, то и другое пусто, т. е. равенство выполняется и в этом случае (выше отмечено, что пустые множества равны друг другу). Формулу (2) предлагается проверить самостоятельно.

Наибольший интерес представляет понятие бесконечного множества. Дадим определение.

Определение 1. Множество A называется *бесконечным*, если, каково бы ни было натуральное число N, найдётся подмножество множества A, содержащее ровно N элементов.

Замечание 1. Легко видеть, что разность бесконечного и конечного множеств — бесконечное множество. Действительно, предположим, что A бесконечно, B конечно и $A \setminus B$ конечно. Это значит, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что в $A \setminus B$ нет подмножества из N элементов. Положим M равным количеству элементов в B. В A существует подмножество A_1, состоящее из $N + M$ элементов (почему?) Заметим, что $A_1 \setminus B \subset A \setminus B$, откуда следует, что в $A \setminus B$ существует подмножество $A_1 \setminus B$, состоящее не менее чем из N элементов, а следовательно, и подмножество, состоящее ровно из N элементов.

Понятно, что конечные множества можно сравнивать по количеству элементов. Возникает вопрос: как сравнивать бесконечные множества? Заметим, однако, что уже для сравнения конечных множеств процедуры подсчёта числа элементов можно избежать. Например, равенство числа студентов в аудитории числу мест за партами легко проверяется, если попросить студентов занять места. Это приводит нас к понятию, которое будет рассмотрена в следующем параграфе.

2. Взаимно однозначное соответствие

Определение 2. Будем говорить, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие* (далее для краткости — ВОС), если на множестве A определена однозначная функция φ, обладающая следующими свойствами:
1) $D(\varphi) = A$,
2) $R(\varphi) = B$,
3) $\forall x, y \in A \ (\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y)$.
Иными словами, функция φ ставит в соответствие *каждому* элементу множества A некоторый элемент множества B, при этом каждый элемент множества B оказывается поставленным в соответствие *некоторому* и *ровно одному* элементу множества B.

Примеры. Нетрудно установить соответствие между множеством всех натуральных чисел и множеством всех чётных натуральных чисел: $\varphi(n) = 2n$. В самом деле, функция φ определена на всём N, её областью значений является всё множество чётных натуральных чисел, поскольку для каждого чётного положительного числа $2m$ существует натуральное m, которое переводится функцией φ в $2m$, причём при $m_1 \neq m_2$ $2m_1 \neq 2m_2$. Можно установить ВОС и между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, полагая $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2k) = k$, $\varphi(2k+1) = -k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. (Проверку условий нетрудно выполнить и для этого случая, что рекомендуется сделать самостоятельно.) Отметим ещё, что мы столкнулись с характерной для бесконечных множеств ситуацией — возможностью установить ВОС между множеством A и собственным (т. е. не совпадающим с A) подмножеством множества A.

Определение 3. Множества A и B называются *равномощными* (обозначение: $|A| = |B|$), если между ними можно установить ВОС.

Как мы увидели, понятие равномощности является обобщением понятие равенства количества элементов (для конечных множеств). Принципиальная разница между конечными и бесконечными множествами состоит уже в том, что первые не могут быть равномощными своему собственному подмножеству, а вторые — могут.

Отметим важное свойство, доказать которое предлагается самостоятельно: если каждое из множеств A, B равномощно множеству C, то A, B равномощны между собой. Так, теперь мы состоянии установить ВОС между $\mathbb{Z}$ и множеством всех чётных натуральных чисел «через посредство» множества $\mathbb{N}$.

Приведём другие важные примеры ВОС между множествами. Так, между невырожденными отрезками $[a;b]$ и $[c;d]$ можно установить соответствие с помощью линейной функции $\varphi(x) = Ax + B$, где коэффициенты A, B определяются из линейной системы

$$\begin{cases} Aa + B = c, \\ Ab + B = d. \end{cases}$$

Очевидно, так же устанавливается соответствие между двумя интервалами или полуинтервалами. ВОС между полуинтервалом $[0;1)$ и лучом $[0;+\infty)$ можно установить с помощью функции $\varphi(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$, взаимная однозначность которой следует из строгой монотонности. Эта же функция (точнее, её продолжение на $(-1;1)$) осуществляет ВОС $(-1;1)$ и $(-\infty;\infty)$.

Отметим также, что в геометрической интерпретации анализа постоянно используется ВОС между действительными числами (бесконечными десятичными дробями без девятки в периоде) и точками на прямой.

Приведём несколько менее тривиальный пример ВОС между числовыми множествами. Интуитивно ясно, что открытый и замкнутый луч равномощны, но как установить ВОС между ними? Рассмотрим множества $[0;+\infty)$ и $(0;+\infty)$. Предлагается следующая идея: отдельно установим соответствие между целыми числами по формуле $\varphi(n) = n+1$, $n \geqslant 0$, после чего остальные точки будут соответствовать сами себе (т. е. все интервалы вида $(n;n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ «останутся на месте», $\varphi(x) = x$ при $x \in [0;+\infty) \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$).

Сформулируем без доказательства следующую важную теорему:

Теорема (Кантора—Бернштейна). Пусть

$$A_1 \subset A, \quad B_1 \subset B, \quad |A_1| = |B|, \quad |B_1| = |A|.$$

Тогда $|A| = |B|$.

Отметим, что отсюда же сразу следует равномощность открытого и замкнутого лучей (как?), доказанная ранее непосредственно, а также равномощность любого промежутка (ненулевой длины) всей числовой прямой. Остановимся на последнем случае подробнее. В самом деле, пусть $A = \mathbb{R}$, $B = \lfloor a;b\rceil$ (такое обозначение не конкретизирует вид промежутка — отрезок, полуинтервал или интервал). Тогда, с одной стороны, $A_1 = B$ и, следовательно, $|A_1| = |B|$, а с другой — существует интервал $B_1 = (a';b') \subset \lfloor a;b\rceil$ и по ранее доказанному $|B_1| = |A|$.

Определение 4. Если $|A| = |\mathbb{R}|$, то говорят, что A *имеет мощность континуума.*

Итак, мы установили, что любой промежуток на числовой прямой имеет мощность континуума.

Замечание 2. Сделаем важное предостережение. До сих пор мы пока говорили лишь о равных мощностях и пока не получили ни одного результата вида «мощность множества A больше мощности множества B». Если вдуматься — мы даже не определелили, что значит последнее высказывание (равенство мощностей определено, неравенство пока нет). Мы дадим это определение позже, а пока заметим, что одного только наличия в A собственного подмножества, равномощного B, недостаточно: как показывают наши примеры, A и B могут быть при этом равномощны (прямая и интервал, например).

3. Счётные множества

В анализе большую роль играют множества, равномощные множеству натуральных чисел.

Определение 5. Если $|A| = |\mathbb{N}|$, то множество A называется *счётным.*

Иными словами, счётное множество — это такое, элементы которого можно пронумеровать, т. е. установить ВОС между A и множеством натуральных чисел.

Из рассмотренных ранее примеров следует, что счётны $\mathbb{N}$ (ВОС устанавливается тождественной функцией), $\mathbb{Z}$, множество всёх чётных натуральных чисел и т. д.

Установим некоторые важные факты относительно счётных множеств.

Лемма 1. Всякое бесконечное множество имеет счётное подмножество.

Доказательство. Рассмотрим следующую процедуру. Пусть A — бесконечное множество. Тогда в нём существует одноэлементное подмножество $\{x_1\}$. В силу замечания 1 множество $A_1 \setminus \{x_1\}$ также бесконечно. Значит, в нём существует одноэлементное подмножество $\{x_2\}$, где, очевидно, $x_2 \neq x_1$. Продолжая эту процедуру бесконечно, мы получим счётное множество $\{x_n\}$. Возможность продолжения такой процедуры следует из того, что на каждом шаге $A_n \equiv A \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ будет бесконечным множеством в силу замечания 1.

Лемма доказана.

Лемма 2. Всякое подмножество счётного множества конечно или счётно.

Доказательство. Пусть $A = \{a_n\}$ счётно, $B \subset A$. Если B конечно, утверждение доказано. В противном случае мы воспользуемся следующими свойствами множества натуральных чисел:
1) любое подмножество множества $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент;
2) для любого натурального числа m существует лишь конечное множество натуральных чисел k, удовлетворяющих неравенству $k < m$.
(Первое свойство следует из второго, но нам сейчас это не важно.) Теперь мы в состоянии пронумеровать все элементы B. Для этого найдём в B элемент a_{n_1} с наименьшим номером (номер элемента множества A определяется ВОС $\mathbb{N} \leftrightarrow A$) и положим $b_1 = a_{n_1}$. Затем сделаем то же самое для $B \setminus \{b_1\}$ и т. д. Таким образом будет построена бесконечная последовательность $\{\mathrm{a}_{n_i}\}$ B, $\mathrm{n}_{i+1} > n_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Почему она содержит все его элементы? Предположим, что элемент $a_m \equiv b \in B$ не вошёл в последовательность. Но это означает, что на каждом l-м шаге он не был элементом с наименьшим номером в $B \setminus \{a_{n_1}, \dots, a_{n_{l-1}}\}$, а следовательно, существует бесконечное множество номеров, меньших номера m элемента $b \equiv a_m$. Это невозможно в силу свойства 2).

Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следует, что счётное множество — это «самый маленький» тип бесконечного множества в том смысле, что всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество, но счётное множество содержит лишь конечные и счётные подмножества.

Дадим ещё одно определение.

Определение 6. Множество называется *не более чем счётным*, если оно конечно или счётно.

Отметим теперь следующие факты.

1) Объединение конечного семейства конечных множеств конечно.

2) Объединение конечного и счётного множеств счётно.

3) Объединение конечного семейства счётных множеств счётно.

4) Объединение счётного семейства конечных множеств счётно.

5) Объединение счётного семейства счётных множеств счётно.
Процедуры «счёта» общеизвестны. В каждом случае необходимо пропускать повторяющиеся элементы. В последнем случае «движемся» по диагоналям «низ-лево—верх-право». Аналогичным способом доказывается **счётность множества рациональных чисел**.

Объединяя эти утверждения, получаем теорему:

Теорема. Объединение не более чем счётного семейства не более чем счётных множеств является не более чем счётным множеством.

Отметим важный в дальнейшем факт: любое семейство непересекающихся интервалов на числовой прямой не более чем счётно, поскольку на каждом интервале найдётся хотя бы одна рациональная точка, причём на различных интервалах будут взяты разные точки (интервалы не пересекаются). Тем самым, указанное семейство интервалов оказывается равномощным не более чем счётному (в силу леммы 1) множеству.

До сих пор мы обсуждали только счётные множества и множества мощности континуума. Возникает вопрос: а не являются ли все бесконечные множества (в том числе и мощности континуума) счётными? Как мы сейчас покажем, нет, и уже $\mathbb{R}$ имеет мощность большую, чем $\mathbb{N}$. Более того, как мы увидим позднее, из одного только существования множества $\mathbb{N}$ следует существование по крайней мере одной бесконечно возрастающей последовательности мощностей бесконечных множеств.

Определение 7. Говорят, что множество A имеет мощность бóльшую, чем множество B, если:
1) B равномощно некоторому подмножеству множеству A;
2) неверно, что $|A| = |B|$.
Как мы видели выше, пункт 2) важен. (См. замечание 2.)

Докажем, что $\mathbb{R}$ имеет мощность большую, чем $\mathbb{N}$. Пункт 1) в данном случае очевиден. Докажем п. 2). Для этого мы установим, что предположение о возможности установить ВОС между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ приводит к противоречию.

Итак, пусть такое соответствие установлено и все действительные числа записаны в виде последовательности $\{a_1, a_2, \ldots\}$. Воспользуемся их десятичными записями. Именно, пусть $a_n = \overline{a_{n1}{,}a_{n2}, a_{n3}\ldots}$, где a_{n1} — любое целое число, a_{ni}, $i \geqslant 2$, — натуральные числа от 0 до 9, причём 9 в периоде исключается. Положим $b = \overline{b_1{,}b_2 b_3 \ldots}$, где $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, $\ldots$, причём все цифры, начиная с b_2, отличны от 9. Тогда, как легко видеть, мы получаем действительное число, отличное от всех a_n. В самом деле, число b по построению отлично от a_i, поскольку $b_i \neq a_{ii}$. Итак, мы получили, что, какая бы последовательность действительных чисел ни была построена, найдётся действительное число, не попавшее в эту последовательность. Утверждение доказано. (Если мысленно выписать последовательность действительных чисел, существование которой предполагается в доказательстве, в столбик, становится ясно, почему данный метод называется *канторовским диагональным процессом*).

Отметим, что подобное рассуждение показывает, что декартово произведение счётного семейства даже конечных (но не пустых и не одноэлементных) множеств несчётно.

Сформулируем без доказательства ещё одну важную теорему.

Теорема (Кантора). Каково бы ни было множество A, множество $P(A)$ всех его подмножеств имеет мощность большую, чем A.

Отметим, что для пустого множества имеем $|\varnothing| = 0$, $|P(\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1$.

Из теоремы Кантора сразу следует, что, отправляясь от $\mathbb{N}$, можно построить бесконечную последовательность бесконечных множеств, мощности которых возрастают.

Задачи для самостоятельного решения

0. Объяснить разницу между $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$.

1. Установить взаимно однозначное соответствие между
1) интервалом и открытым лучом;
2) окружностью и полуинтервалом;
3) интервалом и полуинтервалом;
4) отрезком и интервалом.
Указание. Можно устанавливать соответствия через «множества-посредники».

2. Подробно доказать возможность установить ВОС между A, B, если уже установлены ВОС между A и C и между B и C.

3. Доказать счётность:
1) множества рациональных точек на плоскости, т. е. множества $\{(r, q) \mid r, q \in \mathbb{Q}\}$;
2) множества всех интервалов с рациональными концами.

4. Доказать счётность множества всех алгебраических чисел (корней многочленов с целыми коэффициентами).

5. Почему при доказательстве теоремы Кантора нельзя рассуждать так: «Множество $P(A)$ содержит все одноэлементные подмножества множества A — их уже «столько же», сколько элементов множества A, да ещё и другие подмножества, поэтому мощность $P(A)$ больше мощности A»?

6. (Продолжение.) В каком частном случае так всё-таки можно рассуждать?

7*. Установить ВОС между всеми бесконечными последовательностями нулей и единиц и всеми подмножествами множества натуральных чисел.

8*. Доказать теорему Кантора. *Указание.* Воспользоваться идеей построения «лишнего» элемента из доказательства несчётности $\mathbb{R}$. Напоминаем, что нужно проверить 2 условия.

9*. Найти формулу, «подсчитывающую» счётное объединение счётных множеств при условии, что они не пересекаются.

10. Доказать, что любое семейство непересекающихся кругов на плоскости не более чем счётно. Верно ли аналогичное утверждение для квадратов?

11. Пользуясь десятичными записями действительных чисел и правилами их сравнения, доказать существование рационального числа на каждом интервале.