

ЛЕКЦИЯ 2А

1. Системы множеств

Как вы помните, в лекции 2 построение общей теории меры велось исходя из алгебры измеримых множеств, а прямоугольники, исходя из которых велось построение классической меры на плоскости, алгебры не образуют (почему?). Есть и другие примеры, когда исходное множество задания меры не является алгеброй. В связи с этим имеет смысл рассмотреть другие системы множеств. Дадим несколько определений.

Определение 1. Система множеств S называется *полукольцом*, если:

- 1) $\emptyset \in S$;
- 2) $\forall A \in S, \forall B \in S A \cap B \in S$;
- 3) $\forall A \in S, \forall A_1 \in S, A_1 \subset A, \exists n \in \mathbb{N}, \exists A_2, \dots, A_n \in S: A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n = A$.

Последнее требование проще всего пояснить на примере прямоугольников. Действительно, прямоугольник с прямоугольным вырезом — уже не прямоугольник, однако его можно разрезать на прямоугольники (следя за тем, какие границы куда входят).

Итак, полукольцо — это наиболее «слабая» система множеств в нашем рассмотрении. Будем постепенно усиливать требования. При этом каждое следующее понятие (кроме σ -кольца) будет частным случаем предыдущего. (См. задачу 1.)

Определение 2. Непустая система множеств R называется *кольцом*, если:

- 1) $\forall A \in R, \forall B \in R A \cap B \in R$;
- 2) $\forall A \in R, \forall B \in R A \Delta B \in R$.

Следствие 1. Всякое кольцо множеств R содержит \emptyset . В самом деле, по условию непустоты R существует некоторое $A \in S$. Но тогда по 2) имеем $\emptyset = A \Delta A \in S$.

Следствие 2. Всякое кольцо множеств R вместе с множествами A и B содержит не только их пересечение и симметрическую разность, но и объединение и обе разности. В самом деле, $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$, $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$.

Определение 3. Множество X называется *единицей* системы множеств T , если:

- 1) $X \in T$;
- 2) $\forall A \in T$ верно $A \cap X = A$.

Очевидно, такое название оправдывается ролью множества X при «умножении» (т. е. пересечении) множеств.

Определение 4. Кольцо множеств с единицей называется *алгеброй множеств*.

Легко видеть, что не всякое кольцо (или полукольцо) множеств содержит единицу. В качестве примеров рассмотрим а) семейство всех конечных подмножеств бесконечного множества; б) семейство всех ограниченных подмножеств числовой прямой (или плоскости); в) множество всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке $[0; \pi]$ (последнее — не кольцо, а полукольцо). (См. задачу 4.)

Однако мы пока ещё ничего не сказали о часто встречающихся счётных объединениях множеств. Дадим соответствующее определение.

Определение 5. Система множеств R называется σ -кольцом, если:

- 1) R — кольцо;
- 2) $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in R \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R$.

Определение 6. σ -кольцо множеств с единицей называется σ -алгеброй множеств.

Рассмотрим ещё некоторые примеры.

1. Очевидно, что семейство всех подмножеств данного множества A (даже пустого, т. к. $\emptyset \subset \emptyset$) является каждой из перечисленных здесь систем множеств.
2. Система всех промежутков на прямой (включая и бесконечные) образует полукольцо с единицей. (Почему не кольцо?)
3. Система всех интервалов на прямой **не** образует даже полукольца. В самом деле, полуинтервал $(0; 2) \setminus (0; 1) = [1; 2)$ нельзя разбить на конечное семейство непересекающихся интервалов.
4. Семейство всех прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат (с различными границами, как в лекции 1), образует полукольцо; а если потребовать, чтобы все прямоугольники входили в один фиксированный прямоугольник (стороны которого также должны быть параллельны осям координат), мы получим полукольцо с единицей. (Вопрос: а что образуют прямоугольники, содержащиеся в некотором фиксированном круге?)

Теперь приступим к доказательству некоторых важных свойств этих систем множеств, которые понадобятся в дальнейшем для обоснования различных свойств меры.

Лемма 1 (о конечном разложении). Пусть:

- 1) S — полукольцо,
- 2) $A, A_1, A_2, \dots, A_n \in S$,
- 3) $\forall i = \overline{1, n} A_i \subset A$,
- 4) $\forall i, j = \overline{1, n} A_i \cap A_j = \emptyset$.

Тогда $\exists A_{n+1}, \dots, A_m \in S$ такие, что $A = \bigsqcup_{i=1}^m A_i$.

Доказательство. Докажем это утверждения по индукции. При $n = 1$ утверждение леммы составляет часть определения полукольца. Пусть теперь утверждение доказано для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$. Итак, пусть $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_l$ (здесь мы переобозначили «дополняющие» множества, чтобы не возникло путаницы с A_k). Пусть также A_{k+1} не пересекается с A_1, \dots, A_k . Для каждого B_i ($i = \overline{1, l}$) рассмотрим $B_{i0} \equiv A_{k+1} \cap B_i$ и построим, пользуясь требованием 3 определения полукольца, конечные разложения $B_i = \bigsqcup_{j=0}^{J_i} B_{ij}$. Тогда исходное множество A можно представить в виде

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_l = \left(\bigsqcup_{i=1}^k A_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=0}^{J_1} B_{1j} \right) \sqcup \dots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=0}^{J_l} B_{lj} \right).$$

Легко видеть, что построенное разложение действительно дизъюнктное. А теперь заметим, что $A_{k+1} = \bigsqcup_{i=1}^l B_{i0}$, поскольку множества B_i дают разложение $A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^k A_i \right)$ и $A_i \cap A_{k+1} = \emptyset$,

$i = \overline{1, k}$. Поэтому можно перегруппировать разложение и получить:

$$A = \left(\bigsqcup_{i=1}^k A_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^l B_{i0} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_1} B_{1j} \right) \sqcup \dots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_l} B_{lj} \right) = \left(\bigsqcup_{i=1}^k A_i \right) \sqcup A_{k+1} \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_1} B_{1j} \right) \sqcup \dots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_l} B_{lj} \right).$$

Лемма доказана.

Замечание. Настоятельно рекомендуется при изучении доказательства проиллюстрировать его случаем прямоугольников.

Лемма 2 («о кирпичиках»). Пусть:

- 1) S — полукольцо,
- 2) $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$.

Тогда существуют такие попарно непересекающиеся множества $B_1, \dots, B_k \in S$, что каждое из множеств A_i является объединением некоторых из B_j .

(Доказательство провести самостоятельно.)

2. Аддитивность и счётная аддитивность меры

Теперь приступим к рассмотрению меры на системах множеств. Для этого нам придётся дать ещё несколько определений.

Определение 7. Пусть S — полукольцо множеств, а m — функция, $m : S \rightarrow [0; +\infty) \cup \{+\infty\}$, причём $m \neq +\infty$. Назовём её *мерой* (на полукольце S), если для любого конечного представления

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{где } A, A_1, \dots, A_n \in S,$$

верно равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(A_i). \quad (1)$$

При этом если ряд расходится или если хотя бы одно из слагаемых бесконечно, то его сумма полагается равной $+\infty$.

Если же, кроме того, для любых таких $A, A_1, A_2, \dots \in S$, что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i), \quad (2)$$

то такая мера называется σ -аддитивной.

Замечание. Поскольку кольцо и алгебра (а также σ -кольцо и σ -алгебра) являются частными случаями полукольца, приведённые определения распространяются на них без изменения. (Хотя некоторые требования в условиях становятся излишними. Какие и в каких случаях?)

Заметим, что требование (1) нельзя заменить на парное сложение

$$m(A \sqcup B) = m(A) + m(B) \quad \text{при} \quad A, B, A \sqcup B \in S, \quad (3)$$

поскольку полукольцо не обязано содержать произвольное объединение множеств — своих элементов и наличие в нём, скажем, множеств $A, B, C, A \sqcup B \sqcup C$ не гарантирует наличия $A \sqcup B$, через которое мы могли бы «пройти» от A, B, C к $A \sqcup B \sqcup C$. Поэтому если мы рассмотрим полукольцо, состоящее из множеств $[0; 3), [0; 1), [1; 2), [2; 3)$, то условие (3) не мешает положить $m[0; 3) = 4, m[0; 1) = 1, m[1; 2) = 1, m[2; 3) = 1$, и условие (1) будет нарушено.

Обсудим некоторые простые следствия определения меры на полукольце.

1. Монотонность меры. Пусть $A, B \in S$ и $A \subset B$. Тогда $m(A) \leq m(B)$. Для доказательства достаточно воспользоваться конечным разложением B , включающим A , и аддитивностью меры.

2. Мера пустого множества равна 0. Действительно, поскольку $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, имеем из свойства аддитивности меры $m(\emptyset \cup \emptyset) = m(\emptyset)$, или $2m(\emptyset) = m(\emptyset)$, откуда $m(\emptyset) = 0$.

3. Пусть $A, B, A \cup B \in S$ и $m(A \cap B) < +\infty$. Тогда

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \quad (4)$$

Действительно, $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$ и аналогично для множества B . Построим конечные разложения $(A \setminus B) = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ и $(B \setminus A) = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$. Тогда $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ и

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= \left(\sum_{i=1}^n m(A_i) \right) + \left(\sum_{j=1}^m m(B_j) \right) + m(A \cap B) = \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^n m(A_i) \right) + m(A \cap B) \right) + \left(\left(\sum_{j=1}^m m(B_j) \right) + m(A \cap B) \right) - m(A \cap B) = \\ &= m(A) + m(B) - m(A \cap B). \end{aligned}$$

(Вопрос. Почему потребовалось разбивать $A \setminus B$ и $B \setminus A$?)

4. Пусть $A, B, A \Delta B \in S$ и $m(A \Delta B) = 0$. Тогда $m(A) = m(B)$. Действительно,

$$A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B), \quad B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B). \quad (5)$$

При этом $(A \setminus B) \subset A \Delta B$ и поэтому в силу неотрицательности и монотонности меры $0 \leq m(A \setminus B) \leq m(A \Delta B) = 0$, поэтому

$$m(A \setminus B) = 0, \quad \text{и аналогично} \quad m(B \setminus A) = 0. \quad (6)$$

Тогда из аддитивности меры и (5) и (6) получаем:

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A \setminus B) + m(A \cap B) = m(A \cap B), \\ m(B) &= m(B \setminus A) + m(A \cap B) = m(A \cap B), \end{aligned}$$

или $m(A) = m(B)$. Заметим, что интуитивно это утверждение было очевидно с самого начала: если мера того, чем множества различаются, равна нулю, то и меры этих множеств равны.

Теперь приступим к рассмотрению чуть менее легко доказываемых, но не менее важных свойств меры. Ниже предполагаем, что m — мера на полукольце S , а множества A, A_1, \dots, A_n (или $A, A_1, \dots, A_n, \dots$) принадлежат полукольцу S .

5. (Свойство, в каком-то смысле обратное конечной полуаддитивности.) Пусть при сформулированных выше условиях ещё

$$\bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) \leq m(A).$$

Это совершенно очевидно, если воспользоваться леммой о конечном разложении, неотрицательностью и аддитивностью меры. Действительно, по лемме 1 имеем

$$A = \bigsqcup_{i=1}^m A_i, \quad m \geq n.$$

Но тогда

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) \leq \sum_{i=1}^m m(A_i) = m(A).$$

6. (Конечная полуаддитивность.) Пусть теперь

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Тогда

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i). \tag{7}$$

Для доказательства достаточно применить к семейству множеств A, A_1, \dots, A_n «лемму о кирпичиках» и заметить, что в левую часть (7) мера (а она неотрицательна!) каждого «кирпичика» войдёт не более одного раза, тогда как в правую — не менее одного (а может быть, и несколько раз). (Возможен и несколько другой ход доказательства. Например, Вы рассматриваете вместо A_i множества $A \cap A_i$ — они тоже принадлежат полукольцу — и пользуетесь не только аддитивностью, но и монотонностью меры.)

А можно ли обобщить свойства 5 и 6 меры на счётный случай? Оказывается, для обобщения свойства 5 достаточно рассматривать меру, удовлетворяющую всего лишь требованию (1), тогда как для обобщения свойства 6 (получится счётная полуаддитивность) требуется счётная аддитивность (2). Проведём соответствующие рассуждения.

7. Пусть

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(A). \quad (8)$$

Действительно, для любой конечной подсистемы A_1, \dots, A_k имеем

$$\bigsqcup_{i=1}^k A_i \subset A.$$

Поэтому применимо свойство 5, в силу которого

$$\sum_{i=1}^k m(A_i) \leq m(A). \quad (9)$$

Но тогда, во-первых, ряд в левой части сходится (если $m(A) < +\infty$), а во-вторых, для его суммы после перехода к пределу в неравенстве (9) имеем (8).

8. (Равносильность счётной полуаддитивности и счётной аддитивности.) Мера является σ -аддитивной тогда и только тогда, когда для любых таких множеств $A, A_1, A_2, \dots \in S$, что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно неравенство

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \quad (10)$$

Докажем сначала необходимость. Именно, пусть для любых таких множеств $A, A_1, A_2, \dots \in S$, что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно неравенство

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Тогда мера является σ -аддитивной. Рассмотрим множества такие $B, B_1, B_2, \dots \in S$, что

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Тогда, с одной стороны, для них выполнено

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

и поэтому

$$m(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \quad (11)$$

С другой же стороны, верно обратное вложение

$$B \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

и поэтому в силу свойства 7 (для доказательства которого счётная аддитивность меры не требовалась) имеем

$$m(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \quad (12)$$

Объединяя (11) и (12), имеем

$$m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i),$$

что и доказывает счётную аддитивность меры.

Теперь докажем достаточность. Для этого положим

$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \text{ при } i \geq 1, \quad C_i = B_i \cap A.$$

Имеем $C_i \in S$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Поэтому в силу счётной аддитивности меры $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i)$, но $m(C_i) \leq m(A_i)$, поскольку $C_i \subset A_i$. Утверждение доказано.

Замечание. Использованный в лекции термин «субаддитивность» является синонимом термина «полуаддитивность».

Приведём пример, показывающий, что для меры, не являющейся σ -аддитивной, неравенство (10) может нарушаться. В самом деле, рассмотрим полукольцо множеств, состоящих из всех рациональных точек промежутков $[\alpha; \beta]$, где $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Положим $m([\alpha; \beta]) = \beta - \alpha$. Тогда, с одной стороны, $m([0; 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$, а с другой, оно является счётным объединением одноточечных множеств, и поэтому неравенство (10) нарушается: мы имеем

$$1 = m([0; 1] \cap \mathbb{Q}) > \sum_{i=1}^{\infty} m(\{r_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0,$$

где последовательность $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ перечисляет все рациональные числа отрезка $[0; 1]$.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на все вопросы по ходу текста.

1. Доказать, что всякое кольцо есть полукольцо, всякая алгебра есть кольцо, всякая σ -алгебра есть σ -кольцо и алгебра, всякое σ -кольцо есть кольцо.

2. Доказать, что множество X является единицей для данного кольца R (полукольца S) тогда и только тогда, когда $X = \bigcup_{A \in R} A$ ($X = \bigcup_{A \in S} A$).

3. Образуют ли полукольцо все прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат и вложенные в некоторый фиксированный круг? Имеет ли это полукольцо единицу?

4. Доказать аналоги формулы (4) для конечных множеств. Именно, если $|X|$ — число элементов множества X , то для любых конечных множеств X, Y верно равенство $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

5. Доказать, что:

1) семейство всех конечных подмножеств бесконечного множества образует кольцо, но не образует алгебры;

2) семейство всех ограниченных подмножеств прямой или плоскости образует кольцо, но не образует алгебры;

3) семейство всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке $[0; \pi]$, образует полукольцо (почему не кольцо?);

4) семейство всех промежутков (конечных и бесконечных) числовой прямой образует полукольцо с единицей.

5) Пусть A — бесконечное множество, Y — система всех его не более чем счётных подмножеств. Доказать, что Y — σ -кольцо.

6) Какое условие нужно наложить, чтобы Y было σ -алгеброй?

6. Доказать, что следующие множества являются полукольцами с единицей, и указать соответствующие единицы:

1) $\{[\alpha; \beta) \mid a \leq \alpha \leq \beta \leq b\}$ (включая пустой промежуток);

2) система всех промежутков, вложенных в отрезок $[a; b]$.

7. Доказать «лемму о кирпичиках».

8. Провести более подробно доказательство утверждения 6 на с. 5.

9*. Доказать, что семейство множеств, введённое в контрпримере в конце семинара, — действительно полукольцо, а функция m — действительно мера на нём.

10*. Пусть m — σ -аддитивная мера на полукольце S , принимающая только конечные значения, множества A, A_1, A_2, \dots принадлежат S , причём $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Это свойство меры называется *непрерывностью*.

11*. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств A, A_1, A_2, \dots из R , что

$A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Доказать, что m является σ -аддитивной мерой на R .

12*. Указать пример меры на кольце, которая не является σ -аддитивной.

Дальнейшие задачи (**кроме обязательной задачи 15**) предназначены лишь для особо интересующихся и не включаются в общий счёт. При решении следует иметь в виду, что они распадаются на 2 цикла. Один из них (13–19) описывает продолжение меры с полукольца на минимальное порождённое им кольцо, а второй (20–21) — конструирует меры Лебега—Стилтьеса, находящие применение в спектральной теории линейных операторов и в теории вероятностей.

13*. Пусть S — полукольцо. Доказать, что система

$$R = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i \mid A_i \in S, i = \overline{1, n} \right\}$$

является кольцом.

14*. Пусть S — полукольцо. Доказать, что система

$$R = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^n A_i \mid A_i \in S, i = \overline{1, n} \right\}$$

совпадает с кольцом R , введённым в предыдущей задаче.

15. Доказать, что:

- 1) пересечение произвольной непустой системы колец является кольцом (возможно, состоящим лишь из пустого множества);
- 2) пересечение произвольной непустой системы σ -колец является σ -кольцом;
- 3) пересечение непустой системы алгебр с одной и той же единицей является алгеброй.

(*Указание.* Почему пересечение линейных подпространств фиксированного линейного пространства — снова линейное подпространство?)

16*. Пусть T — система множеств. Доказать, что существует такое кольцо $R(T)$, что

- 1) $T \subset R(T)$ и
- 2) для любого кольца R_1 , содержащего T , верно $R(T) \subset R_1$.

(Такое кольцо называется *минимальным кольцом*, содержащим систему T , или *кольцом, порождённым системой T* .)

17*. (Продолжение.) Доказать, что если система T содержит единицу, то $R(T)$ является алгеброй.

18*. (Продолжение.) Пусть S — полукольцо. Доказать, что $R(S)$ совпадает с кольцом, построенным в задаче 13 и 14.

19*. (Продолжение.) Пусть S — полукольцо. Построить продолжение меры m с полукольца S на порождённое им кольцо $R(S)$.

- 1) Дать определение продолжения меры с полукольца на содержащее его кольцо.
- 2) Построить продолжение меры с S на $T(S)$ и доказать его корректность.
- 3) Доказать единственность возможного продолжения меры с полукольца на порождённое им кольцо.

20*. Пусть $[A; B] \subset \mathbb{R}$, S — полукольцо всех промежутков, вложенных в $[A; B]$ (включая пустой). Доказать, что функция $m : S \rightarrow [0; +\infty)$, где $m([a; b]) = b - a$, является σ -аддитивной мерой на S . (Она называется классической мерой на $[A; B]$.) (Указание. Для доказательства σ -аддитивности воспользоваться леммой Гейне—Бореля.) При продолжении этой меры по Лебегу получается классическая мера Лебега на прямой.

21*. Пусть дано полукольцо $S = \{[a; b] \mid -\infty < a < b < +\infty\} \cup \{\emptyset\}$, $g(x)$ — неубывающая непрерывная слева функция на \mathbb{R} , а функция $m_g : S \rightarrow [0; +\infty)$ определена формулой $m_g([a; b]) = g(b) - g(a)$. Доказать, что m_g — σ -аддитивная мера на S . (Такая мера называется мерой Стильеса.) При продолжении этой меры по Лебегу получается мера Лебега—Стилтьеса на прямой.