ЛЕКЦИЯ 4А

Метрические пространства — 1

1. Примеры и контрпримеры

Мы начнём с рассмотрения примеров, демонстрирующих необходимость осторожного использования интуиции при решении вопросов, связанных с метрическими пространствами. Читателям рекомендуется там, где этого возможно, делать рисунки, но помнить, что рисунок — не часть доказательства, а лишь иллюстрация, помогающая понять ситуацию.

1. Может ли шар радиуса 4 быть подмножеством шара радиуса 3 в некотором метрическом пространстве?

Да, может. Рассмотрим, например, метрическое пространство

$$M = \left\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 3\right\}$$

с обычным расстоянием. Тогда, очевидно, шары радиусов 3 и 4 с центром в точке $(0, 0)$ совпадают. (Внимание! В дальнейшем мы будем опускать уточнение про обычное расстояние.)

2. А можно ли усилить результат предыдущего примера так, чтобы шар радиуса 4 был *собственным* подмножеством шара радиуса 3 в некотором метрическом пространстве?

Оказывается, можно добиться и этого. Положим

$$M = \{-2\} \cup [0; 4].$$

Тогда, как нетрудно убедиться,

$$[0; 4] = B_4^F(3) \subsetneq B_3^F(1) = \{-2\} \cup [0; 4],$$

где символ $B_r^F(x)$ обозначает замкнутый шар (фр. — boule fermée, отсюда буквы B и F) радиуса r. (Открытый шар будем обозначать без верхнего индекса.)

3. Однако не стоит думать, что «может быть всё, что угодно». Покажем, что, если поменять в предыдущем вопросе число 4 на число 7, ответ будет отрицательный.

Мы докажем более общее утверждение: если некоторый замкнутый шар B_R^F радиуса R целиком содержится в замкнутом шаре B_r^F радиуса r и $R \geqslant 2r$, то эти шары совпадают. Для этого достаточно доказать, в дополнение к имеющемуся в условии вложению $B_R^F \subset B_r^F$, обратное вложение. Для этого выберем произвольную точку $x \in B_r^F$. (Попутно заметим, что шар с необходимостью непуст: он содержит по крайней мере свой центр.) Обозначив через O_R и O_r центры соответствующих шаров, из определения шара и неравенства треугольника с учётом условия $R \geqslant 2r$ и того факта, что $O_P \in B_R^F \subset B_r^F$, имеем

$$\rho(O_R, x) \leqslant \rho(O_R, O_r) + \rho(O_r, x) \leqslant r + r = 2r \leqslant R,$$

т. е. $x \in B_R^F$, что и требовалось.

4. Построим следующий странный пример — подпространство $M \subset \mathbb{R}^2$ и открытый шар в нём, который является замкнутым множеством, но не замкнутым шаром. Проще всего описать этот пример на комплексной плоскости. Нарисуем интервалы $(-1;1)$, $(-i;i)$, а также 4 точки $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. То, что получится, и будем считать метрическим пространством M. Легко видеть, что открытый шар B радиуса 1 с центром в 0 есть пространство без точек $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это множество замкнуто, т. к. его дополнение A — те самые 4 точки — является открытым множеством. В самом деле, 0,1-окрестность каждой из этих точек содержит только её саму, а следовательно, не содержит точек, не принадлежащих A. Но множество B не является замкнутым шаром в пространстве M: нетрудно видеть, что какой бы центр $O_1 \in M$ и какой бы радиус мы ни брали, в полученный замкнутый шар или не входят некоторые точки множества B, или входит по крайней мере одна точка множества A (показать это подробно!).

5. Предыдущий пример показывает, что замыкание открытого шара может быть *собственным* подмножеством соответствующего замкнутого шара. Тем самым, нельзя гарантировать, что $\overline{B_r(x)} = B_r^F(x)$. Однако всегда верно вложение

$$\overline{B_r(x)} \subset B_r^F(x).$$

Действительно, замыкание $\overline{B_r(x)}$ открытого шара $B_r(x)$ есть (по определению замыкания) пересечение всех содержащих его замкнутых множеств. Среди них есть и замкнутый шар $B_r^F(x)$ (проверить по определению замкнутого и открытого шаров!). Следовательно, $\overline{B_r(x)} \subset B_r^F(x)$, поскольку пересечение содержится в каждом из пересекаемых множеств.

6. Пусть $x \in M$ — произвольная точка, а $A \subset M$ — произвольное множество в метрическом пространстве M. Можно определить *расстояние от точки x до множества A*, положив

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

Нетрудно заметить, что если A — замкнутое множество и $x \notin A$, то $\rho(x, A) > 0$. В самом деле, если A замкнуто, то его дополнение A^c открыто, а тогда поскольку $x \in A^c$, то x — внутренняя точка A^c, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что в ε-окрестности точки x нет точек из множества A. Значит, $\rho(x, A) \geqslant \varepsilon$.

Пусть теперь

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

— «расстояние» между множествами A и B. Можно ли утверждать, что $\rho(A, B) > 0$, если множества A и B замкнуты и не пересекаются?

Оказывается, нет. Нетрудно привести пример, положив в качестве A и B графики функций $y = 0$ и $y = \frac{1}{x}$ на плоскости. (Докажите аккуратно, что оба множества замкнуты.)

7. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве M. Можно ли построить их непересекающиеся открытые окрестности, т. е. такие открытые множества $O_A \supset A$ и $O_B \supset B$, что $O_A \cap O_B = \varnothing$?

Если «расстояние» d (см. предыдущий п.) между множествами A, B положительно, положительный ответ на данный вопрос был бы очевиден: достаточно было положить O_A равным объединению $\frac{d}{3}$-окрестностей всех точек множества A и аналогично поступить для множества A. (Докажите, что в этом случае задача и в самом деле была бы решена.) Но, как мы знаем, положительность величины d не гарантирована даже для непересекающихся замкнутых множеств. Однако ответ всё-таки утвердительный (см. задачу 5).

2. Свойства открытых и замкнутых множеств. Классификация точек по отношению к множествам

Введём прежде всего следующие понятия:
1) точка x называется *предельной точкой* множества A, если любая окрестность точки x содержит точки множества A, отличные от x (можно сказать так: любая *проколотая* окрестность точки x имеет непустое пересечение с множеством A);
2) точка x называется *граничной точкой* множества A, если любая окрестность точки x содержит как точки множества A, так и точки его дополнения;
3) точка x называется *точкой касания* (точкой прикосновения) множества A, если любая окрестность точки x содержит точки множества A (в частности, так будет при $x \in A$ — обратите внимание на отличие от предельной точки!);
4) точка x называется *внутренней точкой* множества A, если некоторая окрестность точки x целиком содержится в множестве A;
5) точка x называется *изолированной точкой* множества A, если $x \in A$, но некоторая проколотая окрестность не содержит точек множества A (можно сказать и так: некоторая окрестность точки x не содержит точек из A, кроме самой точки x).

Здесь важно отметить следующую языковую неточность. Во всех пяти определениях фигурируют слова «точка множества A». Однако только в последних двух речь действительно с необходимостью идёт о принадлежности $x \in A$. Точки первых трёх типов могут как принадлежать, так и не принадлежать A, и слова «точка множества A» в определениях 1)—3) говорят лишь об отношении, в котором точка x находится именно с множеством A, — отношении, не связанном непосредственно с отношением «принадлежать».

После сделанного замечания приведём некоторые примеры.

1. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = [0; 1) \cup 2$. Тогда:
1) $[0; 1]$ суть предельные точки A;
2) 0, 1 и 2 суть граничные точки A;
3) $[0; 1]$ и 2 суть точки касания A;
4) $(0; 1)$ суть внутренние точки A;
5) 2 — изолированная точка A.

2. Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leqslant x < 11\} \cup \{(100, 100)\}$. Тогда:

1) $\{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \mid y=0, 10 \leqslant x \leqslant 11\}$ суть предельные точки A;
2) $\{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} = 1\} \cup \{(x,y) \mid y=0, 10 \leqslant x \leqslant 11\} \cup \{(100,100)\}$ суть граничные точки A;
3) точки касания A — те же, что и предельные, и $(100,100)$;
4) $\{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$ суть внутренние точки A;
5) $(100,100)$ — изолированная точка A.

3. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = [0;1) \cap \mathbb{Q}$. Тогда:
1) $[0;1]$ суть предельные точки A;
2) $[0;1]$ суть граничные точки A (почему?);
3) $[0;1]$ суть точки касания A;
4) внутренних точек у A нет;
5) изолированных точек у A нет.

4. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда:
1) 0 — предельная точка A;
2) $0 \cup A$ суть граничные точки A;
3) $0 \cup A$ суть точки касания A;
4) внутренних точек у A нет;
5) множество изолированных точек A совпадает с A.

5. Пусть $M = [0;1) \cup \{2\}$, $A = (0;1) \cup \{2\}$. Тогда:
1) $[0;1)$ суть предельные точки A;
2) 0 — граничная точка A;
3) $[0;1) \cup \{2\}$ суть точки касания A;
4) $(0;1) \cup \{2\}$ суть внутренние точки A;
5) 2 — изолированная точка A.

Если вы разобрались с помощью предложенных примеров в типах точек по отношению к заданному множеству в метрическом пространстве, то поняли, в частности, что:
1) точки, *принадлежащие* данному множеству, делятся на внутренние и граничные;
2) точки касания делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (среди них могут быть внутренние), так и не принадлежать;
3) граничные точки делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (но не быть внутренними), так и не принадлежать;
4) изолированные точки множества могут являться граничными, а могут и не являться (см. п. 4 § 1 и пример 5 выше);
5) открытое множество целиком состоит из своих внутренних точек (следовательно, не имеет изолированных), а его граничные точки ему не принадлежат
и т. д.

Обсудим теперь возможные (равносильные!) определения замкнутого множества в метри-

ческом пространстве:
1) его дополнение открыто;
2) его замыкание совпадает с ним самим (о замыкании см. ниже);
3) оно содержит все свои граничные точки;
4) оно содержит все свои предельные точки;
5) оно содержит все свои точки касания;
6) для любой последовательности $x_n \to x$, где $x_n \in A$ (A — рассматриваемое множество), $x \in M$, верно $x \in A$.
(Из сделанного выше замечания следует, что слово «свои» здесь не означает a priori принадлежность множеству A).

Нетрудно (хотя и несколько кропотливо) доказать их равносильность.

Напомним:
1) пустое множество и всё пространство являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами;
2) произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств — открытое множество;
3) дополнение открытого множества замкнуто, замкнутого — открыто;
4) произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых множеств — замкнутое множество.

Отметим также важнейшие свойства операции замыкания $A \mapsto \overline{A}$. Прежде всего, ей тоже можно дать несколько определений. Ограничимся следующими:
1) $\overline{A}$ есть множество A плюс все его предельные точки;
2) $\overline{A}$ есть множество всех точек касания множества A;
3) $\overline{A}$ есть множество A плюс все его граничные точки;
4) $\overline{A}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Отметим следующие свойства операции замыкания:
0) $\overline{A}$ — замкнутое множество;
1) $A \subset \overline{A}$, причём равенство имеет место для замкнутых множеств и только для них;
2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
3) $A_1 \subset A_2 \;\Rightarrow\; \overline{A_1} \subset \overline{A_2}$;
4) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

Докажем эти свойства.
0) Замыкание замкнуто как пересечение замкнутых множеств.
1) Следует из того, что в пересечение входят лишь те замкнутые множества, которые содержат множество A. Далее, если само A замкнуто, то оно входит в число пересекаемых множеств и поэтому указанное пересечение содержится в A. А поскольку верно и обратное включение, то они совпадают. Обратно, из равенства множества A своему замыканию следует, что множество A замкнуто (силу свойства 0)).

2) Заметим, что $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ в силу 1). Далее, в силу 0) $\overline{A}$ замкнуто. Тогда согласно 2) имеет место равенство.
3) Заметим, что среди замкнутых множеств, содержащих A_1, есть множество $\overline{A_2}$, а тогда пересечение таких множеств содержится в $\overline{A_2}$, поскольку пересечение содержится в каждом из пересекаемых множеств.
4) Для доказательства вложения $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$ заметить, что $A_i \subset A_1 \cup A_2$ $(i = 1; 2)$, и применить п. 3). Тогда мы получим, что $\overline{A_i} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$, а следовательно, то же включение верно и для объединения $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Заметим, что это рассуждение проходит для объединения любого (конечного или бесконечного семейства множеств).

Для доказательства обратного вложения заметим, что $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ замкнуто как объединение конечного семейства (!) замкнутых множеств и содержит A_1 и A_2, а следовательно, их объединение: $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \supset A_1 \cup A_2$. Тогда, применив п. 3) вместе с п. 1), получаем: $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}} \supset \overline{A_1 \cup A_2}$. Это рассуждение может быть обобщено на любое *конечное* семейство множеств $\{A_k\}_{k=1}^{n}$, но не на бесконечное. Легко привести контрпример: если $A_k = \{q_k\}$, где последовательность $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ «пересчитывает» все рациональные точки отрезка $[0; 1]$, то замыкание объединения представляет собой весь отрезок, а объединение замыканий содержит только эти точки. (Где в рассуждении существенна конечность семейства множеств $\{A_k\}$?)

Итак, *обобщение свойства 4) на бесконечные объединения неверно.* Неверно и обобщение этого свойства на пересечение. Пример к последнему привести совсем просто: $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \overline{\varnothing} = \varnothing$, но $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Однако можно утверждать, что $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Действительно, имеем

$$A_1 \cap A_2 \subset A_i \subset \overline{A_i}, \quad i = 1, 2, \quad \Longrightarrow \quad A_1 \cap A_2 \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

С другой стороны, $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ — замкнутое множество (как пересечение замкнутых). Таким образом, множество $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ участвует в пересечении множеств, образующих $\overline{A_1 \cap A_2}$, что и доказывает требуемое утверждение в силу определения пересечения. (Верно ли это рассуждения для счётного семейства множеств?)

3. Пример метрического пространства последовательностей

На лекции 4 были рассмотрены пространства числовых последовательностей l^p и m. Было отмечено, что последнее является несепарабельным. Мы приведём пример его сепарабельного подпространства.

Итак, пусть c — пространство сходящихся последовательностей. Очевидно вложение $c \subset m$ как множеств. Тогда можно ввести на c метрику так же, как она была введена на m. Тогда m становится подпространством метрического пространства m и корректность введения метрики (аксиомы метрического пространства) имеет место автоматически: как нетрудно заметить, всякое подмножество A метрического пространства M становится метрическим пространством, если определить $\rho_A(x, y) = \rho_M(x, y)$.

Докажем сначала полноту пространства c. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов пространства c. Таким образом, x_k при каждом $k \in \mathbb{N}$ представляет собой числовую последовательность. Будем обозначать номер числа в последовательности верхним индексом: $x_k^{(n)}$ — n-й элемент числовой последовательности x_k. Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}\, \forall k > K\, \forall p \in \mathbb{N} \;\; \rho(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon. \tag{1}$$

Перепишем (1) с учётом определения расстояние в пространстве c:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}\, \forall k > K\, \forall p \in \mathbb{N} \;\; \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_k^{(n)} - x_{k+p}^{(n)}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Из (2) следует:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}\, \forall k > K\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, |x_k^{(n)} - x_{k+p}^{(n)}| < \varepsilon. \tag{3}$$

Следовательно, при каждом фиксированном n последовательности $x_k^{(n)}$ фундаментальны. Обозначим пределы этих последовательностей через $x^{(n)}$ и образуем тем самым последовательность $x \equiv \{x^{(n)}\}$. Перейдя в (3) к пределу при $p \to \infty$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}\, \forall k > K\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, |x_k^{(n)} - x^{(n)}| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Из (4) следует, что элементы x_k сходятся к элементу x в пространстве m. Осталось лишь доказать, что $x \in c$. Тогда получим $x_k \to x$ в c (поскольку расстояния в пространствах m и c введены одинаково), и тем самым будет доказана полнота пространства m. Итак, достаточно доказать, что c — сходящаяся последовательность. Это будет следовать из того, что она фундаментальна. А для доказательства её фундаментальности мы воспользуемся так называемым $\frac{\varepsilon}{3}$-приёмом, который знаком вам из доказательства непрерывности равномерного предела непрерывных функций и который будет ещё не раз встречаться в дальнейшем.

Итак, пусть дано $\varepsilon > 0$ и надо указать такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N\, \forall q \in \mathbb{N} |x^{(n)} - x^{(n+q)}| < \varepsilon. \tag{5}$$

Для этого вначале найдём такое $K \in \mathbb{N}$ в (4), что при всех $k > K$

$$\forall n \in \mathbb{N}\, |x_k^{(n)} - x^{(n)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Далее, взяв последовательность $x_k \equiv \{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ с номером $k = K + 1$ (напомним, что она сходится, а следовательно, фундаментальна), выберем такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N_1\, \forall q \in \mathbb{N} \;\; |x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Тогда, используя (6) и (7), получим для всех $n > N_1$, $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |x^{(n)} - x^{(n+q)}| &= \left| \left(x^{(n)} - x_k^{(n)} \right) + \left(x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)} \right) + \left(x_k^{(n+q)} - x^{(n+q)} \right) \right| \leqslant \\ &\leqslant \left| x^{(n)} - x_k^{(n)} \right| + \left| x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)} \right| + \left| x_k^{(n+q)} - x^{(n+q)} \right| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned} \tag{8}$$

что и требовалось. Итак, утверждение доказано.

Покажем теперь, что пространство c сепарабельно. Ключевой идеей здесь будет переход от бесконечных последовательностей к «конечным» в том смысле, что они будут постоянными начиная с некоторого номера.

Сначала мы построим счётное подмножество в c. Затем покажем, что оно всюду плотно. Для каждого рационального числа q и каждого натурального числа l рассмотрим всевозможные последовательности, у которых на местах до $(l-1)$-го включительно стоят произвольные рациональные числа, а начиная с l-го места — число q. Из результатов лекции 0а следует, что 1) при фиксированных l и q множество таких последовательностей счётно, 2) объединение всех таких множеств сначала по $l \in \mathbb{N}$, а потом по $q \in \mathbb{Q}$ тоже счётно. Осталось понять, почему построенное подмножество c_0 всюду плотно в c. Пусть нам дана произвольная последовательность $y \in c$. Пусть $y^{(n)} \to b$ (напоминаем, что пространство c состоит из сходящихся последовательностей). Пусть дано $\varepsilon > 0$ и требуется найти последовательность $z \in c_0$ такую, что $\rho(y,z) < \varepsilon$. Для этого прежде всего находим рациональное число r такое, что $|b-r| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее находим такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ верно неравенство $|y^{(n)} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем теперь последовательность из c_0 следующим образом: 1) положим $q = r$, $l = N+1$; 2) элементы $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{N}$ приблизим рациональными числами с точностью ε, положив $z^{()} : |z^{(n)} - y^{(n)}| < \varepsilon$, $z^{(n)} \in \mathbb{Q}$ при $n = 1, \dots N$, и возьмём $z^{(n)} = r$ при $n > N$. Легко проверить, что $z \in c_0$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} |y^{(n)} - z^{(n)}| < \varepsilon$.

Можно задаться вопросом, плотно ли подпространство c в пространстве m. Легко сообразить, что нет: иначе бы m было сепарабельным вследствие сепарабельности c.

В порядке дальнейшего обсуждения свойств пространства c приведём пример последовательности его элементов, сходящиеся к элементу $(0,0,0,\dots)$ в c, но не сходящейся в l^1. Положим

$$x_k = \Big(\underbrace{\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k}, 0, \dots\Big). \tag{9}$$

Легко видеть, что $x_k \to (0,0,0,\dots)$ в c, но в пространстве l^1 последовательность $\{x_k\}$ не является даже фундаментальной, — см. задачу 23. (очевидно, отсутствие фундаментальности — достаточное условие отсутствия сходимости, нередко удобно проверяемое на практике).

Свойства метрических пространств, связанные с компактностью (полная ограниченность, сепарабельность, пространства непрерывных функций и теорема Арцела), будут рассмотрены в дальнейшем, при изучении общего понятия компактности для топологических пространств. То же относится к понятию базы и аксиомам счётности.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на вопросы по ходу текста.

1. Убедиться в том, что следующие множества с указанной функцией $\rho(x,y)$ являются метрическими пространствами:

1) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}}(|x_i - y_i|)$;
2) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
3) любое множество M с $\rho(x,y) = 1$ при $x \neq y$, $\rho(x,y) = 0$ при $x = y$.

2. Доказать неравенство четырёхугольника: $|\rho(x,z) - \rho(y,w)| \leqslant \rho(x,y) + \rho(z,w)$.

3. Убедиться в том, что открытый шар открыт, а замкнутый шар замкнут (приняв любое определение замкнутости).

4. Построить пример метрического пространства M — подмножества $\mathbb{R}^2$, — в котором существует замкнутый шар, являющийся открытым множеством, но не открытым шаром.

5. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве M. Построить их непересекающиеся открытые окрестности, т. е. такие открытые множества $O_A \supset A$ и $O_B \supset B$, что $O_A \cap O_B = \varnothing$.

6. (Продолжение.) Пусть $M = [1;2] \cup [4;5]$, $A = [1;2]$, $B = [4;5]$. Остаётся ли верным утверждение предыдущей задачи? Указать в явном виде множества O_A и O_B.

7. Объяснить подробно некоторые (* —все) примеры § 2.

8. Верны ли следующие утверждения для произвольного фиксированного множества:
1) каждая его предельная точка есть его точка касания;
2) каждая его внутренняя точка есть предельная точка;
3) каждая его точка касания — либо внутренняя точка, либо изолированная точка;
4) множество всех его граничных точек вместе с множеством всех его внутренних точек есть само множество A;
5) множество всех его внутренних точек вместе с множеством всех его изолированных точек есть само множество A?

9. Верны ли следующие утверждения:
1) замкнутое множество не имеет внутренних точек;
2) замкнутое множество не может состоять из одних только внутренних точек;
3) все точки открытого множества суть его точки касания?

10. Доказать равносильность хотя бы некоторых (* — всех) определений замкнутого множества.

11 Доказать равносильность хотя бы некоторых (* — всех) определений замыкания.

12. Доказать хотя бы некоторые (* — все) свойства замыкания.

13. Решить задачу 9* из лекции 1а.

14. Привести пример счётного пересечения открытых множеств, дающего замкнутое множество; привести пример счётного объединения замкнутых множеств, дающего открытое множество.

15. Привести пример метрического пространства, имеющего более 2-х открыто-замкнутых подмножеств.

16. Привести пример, показывающий, что свойство 4) операции замыкания не выполняется для счётных объединений. (*Указание.* Подходящий пример есть в тексте.)

17*. (Продолжение.) Доказать, что в случае полноты M_2 пространство $C(M_1, M_2)$ также полно. (Можно воспользоваться $\frac{\varepsilon}{3}$-приёмом.)

18. Доказать сепарабельность пространств l^p, $p \in [1; +\infty)$. (*Указание.* Начните с $p = 1$.)

19*. Показать, что в пространстве $L^1(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, плотны даже непрерывные функции.

20. Являются ли замкнутыми подмножествами в $C[a; b]$:

1*) подмножество всех многочленов степени не выше n;

2) подмножество всех многочленов;

3) подмножество всех непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a; b]$?

21. Почему в п. 6 слово «расстояние» взято в кавычки?

22. Доказать, что последовательность (9) не является фундаментальной в l^1.

23. Верно ли:

1) всякая изолированная точка есть точка касания?

2) для любого множества A верно $A \subset \operatorname{int} A \cup \partial A$, где $\operatorname{int} A$ — множество внутренних точек множества A?