ЛЕКЦИЯ 4Б

Метрические пространства — 2

1. Простейшие (и важнейшие) свойства метрических пространств

1. *Непрерывность расстояния.* Легко видеть, что функция «расстояние» $\rho(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов. Действительно, из неравенства четырёхугольника (см. задачу 2 из лекции 4а)

$$|\rho(x, z) - \rho(y, w)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, w)$$

при $x_n \to x$, $y_n \to y$ (что по определению сходимости в метрическом пространстве означает не что иное, как $\rho(x_n, x) \to 0$, $\rho(y_n, y) \to 0$) имеем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

2. *Единственность предела.* Легко видеть, что у последовательности в метрическом пространстве может быть не более одного предела. В самом деле, наличие двух пределов x, x' у последовательности $\{x_n\}$ в силу неравенства треугольника и только что доказанной непрерывности расстояния означало бы, что $0 \leqslant \rho(x, x') \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_n, x') \to 0$, или $0 \leqslant \rho(x.x') \leqslant 0$, откуда $\rho(x, x') = 0$ и по определению расстояния $x = x'$. Однако, имея в виду изучение в скором времени топологических пространств и их свойств, полезно провести доказательство таким образом: в случае наличия двух пределов x, x' можно было бы взять их непересекающиеся окрестности, и тогда вся последовательность $\{x_n\}$, кроме некоторых начальных отрезков, должна была бы находиться в каждой из этих окрестностей, что, очевидно, невозможно. (*Задание.* Доказать, что при $\varepsilon = \rho(x, x')$ $\varepsilon/3$-окрестности точек x и x' действительно не пересекаются.)

2. Некоторые свойства полных метрических пространств и их приложения

3. Подпространство M_1 *полного* метрического пространства M образует (с тем же расстоянием ρ_M) полное метрическое пространство тогда и только тогда, когда M_1 — замкнутое подмножество пространства M.

1) Действительно, в силу полноты M любая фундаментальная последовательность его элементов, в т. ч. и содержащая только элементы M_1, имеет предел (принадлежащий M). Но если M_1 замкнуто, то этот предел принадлежит M_1 (эквивалентное определение замкнутости!).

2) Обратно, пусть M_1 — полное метрическое пространство (относительно расстояния ρ_M). Тогда предел всякой последовательности, принадлежащей M_1, принадлежит M_1, что и означает, что M_1 замкнуто в M.

Замечание 1. Очевидно, что полнота пространства M_1 в первом рассуждении существенна. (Достаточно рассмотреть $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $M_1 = M$.)

Замечание 2. Во втором рассуждении мы неявно использовали единственность предела. Если бы пределов могло быть больше одного, то можно было бы представить себе ситуацию, когда один из пределов принадлежит M_1 (и тем самым обеспечивает его полноту), а другой — не принадлежит, нарушая замкнутость.

4. *Теорема о неподвижной точке*, или *принцип сжимающих отображений.*

Определение. Отображение $F : M \to M$ называется *сжимающим*, если

$$\exists q \in [0;1) \, \forall x, y \in M \;\; \rho(F(x), F(y)) \leqslant q\rho(x,y). \tag{1}$$

Теорема (о неподвижной точке). Пусть $F : M \to M$ — сжимающее отображение. Тогда существует, и притом единственная, точка $x \in M$ такая, что $F(x) = x$, и она может быть найдена методом простой итерации (последовательных приближений): для любого $x_0 \in M$ верно предельное соотношение

$$x = \lim_{n\to\infty} F^n(x_0). \tag{2}$$

Доказательство. 1. Существование неподвижной точки. Пусть x_0 — произвольная точка пространства M. Построим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, положив

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Легко установить её фундаментальность:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant \rho(x_0, x_1)\cdot q^n(1 + \ldots + q^{p-1}) \leqslant \rho(x_0, x_1)\cdot q^n \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Следовательно, существует предел

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Поскольку сжимающее отображение, очевидно, непрерывно, можем перейти к пределу в равенстве (3):

$$x = F(x).$$

Таким образом, существование неподвижной точки отображения F установлено. Единственность же очевидна: в случая наличия двух неподвижных точек $\bar{x}, \bar{\bar{x}}$ в силу (1) и определения расстояния имеем

$$\rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = \rho(F(\bar{x}), F(\bar{\bar{x}})) \leqslant q\rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}),$$

откуда $\rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$ и $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$.

Теорема доказана.

Эта теорема (а также её усиленные варианты) находит широкое применение в доказательстве однозначной разрешимости многих задач математической физики. Вам уже известно её применение в теории интегральных уравнений (для уравнений Фредгольма с «малым» λ применяется именно она, для уравнений Вольтерра с произвольным λ — усиленная). Покажем, как с помощью данной теоремы доказать теорему об однозначной разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:
i) $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leqslant \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$;
ii) $\exists L > 0\, \forall x \in [x_0 - a; x_0 + a], \forall y_1, y_2 \in [y_0 - b; y_0 + b] \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$.
(Второе свойство называется Липшиц-непрерывностью.) Тогда:
1) существует такое $M > 0$, что всюду в Π верно неравенство $|f(x, y)| \leqslant M$;
2) задача (4) имеет единственное решение на промежутке $[x_0; x_0 + a_1]$, где $0 < a_1 \leqslant \min(a, \frac{b}{M})$.

Доказательство. Утверждение 1) непосредственно следует из теоремы Вейерштрасса в силу того, что прямоугольник Π является ограниченным замкнутым множеством на плоскости. Перейдём к доказательству утверждения 2).

Заметим, что задача (4) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{5}$$

Точнее, при каждом $x_1 \leqslant x_0 + a$ равносильны следующие утверждения:
1. $y(x) \in C^1[x_0; x_1]$ является решением задачи Коши (4).
2. $y(x) \in C[x_0; x_1]$ является решением интегрального уравнения (5).
Действительно, интегрируя уравнение в (4) с учётом начального условия, сразу приходим к (5). Обратно, если $y(x) \in C[x_0; x_1]$ — решение интегрального уравнения (5), то подынтегральное выражение в (5) непрерывно как композиция непрерывных функций и $y(x)$ непрерывно дифференцируема как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции и удовлетворяет задаче (4). Поэтому однозначная разрешимость задачи Коши (4) в классе $y(x) \in C^1[x_0; x_1]$ равносильна однозначной разрешимости интегрального уравнения (5) в классе $y(x) \in C[x_0; x_1]$. Именно эту последнюю однозначную разрешимость мы сейчас и докажем.

Рассмотрим замкнутый шар

$$B \equiv B_R^F(y_0) \equiv \left\{ z(x) \in C[x_0, x_1] \mid \sup_{x \in [x_0; x_1]} |z(x) - y_0| \leqslant R \right\} \tag{6}$$

в пространстве $C[x_0, x_1]$, где параметры R и $x_1 \leqslant x_0 + a$ будут определены позднее. Множество B замкнуто (как всякий замкнутый шар) и полно (как всякое замкнутое множество в полном метрической пространстве). Наша задача — добиться, чтобы интегральный оператор $F(y)$, действующий по правилу

$$F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi,$$

во-первых, не выводил из шара B, а во-вторых, являлся в нём сжимающим отображением. (*Замечание.* Этот оператор не является линейным!)

Заметим, что при $x \in [x_0; x_1]$, $y(x) \in B$ верна следующая цепочка:

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi \right| \leqslant |x - x_0| M \leqslant (x_1 - x_0) M. \tag{7}$$

Следовательно, оператор F не выводит из B при $x_1 - x_0 \leqslant \frac{b}{M}$. Далее, при $x \in [x_0; x_1]$, $y_1(x), y_2(x) \in \in B$ имеем

$$|F(y_1)(x) - F(y_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi)))\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi))|\, d\xi \leqslant \int_{x_0}^{x} L|y_1(\xi) - y_2(\xi)| d\xi \leqslant \leqslant |x - x_0| L \sup_{x \in [x_0; x_1]} |y_1(x) - y_2(x)|. \tag{8}$$

Взяв теперь в (8) точную верхнюю грань по $x \in [x_0; x_1]$, получаем

$$\rho(F(y_1), F(y_2)) \leqslant |x_1 - x_0| L \rho(y_1, y_2),$$

откуда следует, что для того, чтобы отображение $F : B \to B$ было сжимающим, достаточно потребовать $x_1 - x_0 \leqslant \frac{b}{M} \leqslant \frac{1}{2L}$. Итак, мы получили, что при

$$a_1 = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2L}\right)$$

отображение $F : B \to B$ является сжимающим в полном метрическом пространстве $B \subset \subset C[x_0; x_0 + a]$. В силу теоремы о неподвижной точке и рассуждений, приведённых выше, это и доказывает теорему.

Теорема доказана.

Замечание 3. Классическая теорема Коши о существовании и единственности решения задача Коши — несколько более сильное утверждение: она гарантирует существование решения на промежутке $[x_0; x_0 + a_1]$ с $a_1 = \min(a, \frac{b}{M})$. Для получения этого результата можно использовать усиленный вариант теоремы о неподвижной точке и показать, что достаточно большая степень оператора F будет сжимающим отображением для любого наперёд заданного x_1. Можно, однако, поступить по-другому и воспользоваться более общей идеей продолжения решений дифференциальных уравнений во времени. Мы пойдём по второму пути, отложив соответствующие рассмотрения до изучения теории банаховых пространств, что позволит получить достаточно общий результат.

Замечание 4. Важно, что в определении сжимающего отображения будет недостаточно просто потребовать уменьшения расстояния между любыми различными точками. Легко привести контрпример. Пусть

$$F(x) = x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad M = \mathbb{R}.$$

Тогда для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant |F'(\xi)||x_1 - x_2| = \left|1 - \frac{1}{1+\xi^2}\right| \cdot |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

но существование неподвижной точки функции F противоречило бы неравенствам $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

5. *Теорема о вложенных шарах.* Обсудим некоторые условия этой теоремы и их существенность. Понятно, что полнота пространства, как и замкнутость шаров, существенны. Так, в пространстве $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ замкнутые шары радиуса $\frac{1}{2n}$ с центрами в точках $x_n = \frac{1}{2n}$ имеют пустое пересечение. Открытые шары в пространстве $M = \mathbb{R}$ с центрами в тех же точках и тех же радиусов также имеют пустое пересечение. Можно рассмотреть и аналогичный пример на плоскости (получатся открытые круги, касающиеся внутренним образом). Гораздо менее ожидаемо, что нельзя обойтись без условия стремления радиусов шаров к нулю. Приведём соответствующий пример. Рассмотрим метрическое пространство, носителем которого является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, а расстояние между числами введено как

$$\rho^*(m,n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n, \\ 0, & m = n. \end{cases}$$

Выполнение аксиом расстояния проверяется непосредственно. Далее, легко установить полноту пространства: поскольку в нём расстояние между любыми различными точками больше 1, фундаментальными являются лишь финально постоянные (постоянные начиная с некоторого номера) последовательности. Каждая такая последовательность, очевидно, имеет предел. Рассмотрим теперь шары $B_n \equiv \{m \in \mathbb{N} \mid \rho^*(m,n) \leqslant 1 + \frac{1}{2n}\}$. Эти шары замкнуты, т. к. заданы нестрогим неравенством. Далее, условие $\rho^*(m,n) \leqslant 1 + \frac{1}{2n}$ равносильно $m \geqslant n$ с учётом того, что при $m = n$ расстояние равно нулю по определению. Поэтому $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Тогда очевидно, что $B_{n+1} \subset B_n$, но пересечение всех шаров пусто. Таким образом, имеем последовательность вложенных замкнутых шаров, *радиусы которых не стремятся к* 0, с пустым пересечением.

Ещё проще привести пример последовательности замкнутых вложенных неограниченных множеств в полном пространстве, пересечение которых пусто. Годится система $[n; +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Однако можно снять требование, чтобы рассматриваемые в теореме множества были именно шарами. Достаточно потребовать лишь, чтобы они были ограниченными замкнутыми множествами A_n, диаметры которых стремятся к 0. В самом деле, тогда, взяв произвольным образом в каждом n-ом множестве точку x_n, получим последовательность $\{x_n\}$. Она обладает тем свойством, что $x_n \in A_m$ при всех $n \geqslant m$ (в силу цепочки $x_n \in A_n \subset A_{n-1} \subset \ldots \subset A_m$). Поэтому $\{x_n\}$ фундаментальна («хвосты» лежат в стягивающихся множествах). Её предел принадлежит любому из множеств A_n, потому что, опять-таки, все члены последовательности, начиная с n-го, лежат в A_n, которое, как замкнутое, обязано содержат предел последовательности своих элементов $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Единственность же общей точки по-прежнему следует из стремления к нулю диаметров множеств.

6. *Теорема Бэра о категориях.* В связи с этой теоремой (сформулированной и доказанной в лекции 4) мы обсудим лишь один кажущийся парадокс. Рассмотрим метрическое пространство X, состоящее из одной точки x. Тогда можно положить $X_n = X$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Но разве X содержит открытый шар? Конечно, да! Открытый шар любого положительного радиуса с центром в точке x просто совпадает с пространством X! Отметим ещё, что теорема Бэра о категориях используется при доказательстве принципа равномерной ограниченности, который, в свою очередь, нужен при доказательстве одной из важнейших теорем линейного функционального анализа — теоремы Банаха—Штейнгауза.

7. *Гомеоморфизм полного и неполного метрических пространств.* Будем называть биекцию между двумя метрическими пространствами гомеоморфизмом, если она непрерывна в обе стороны. Оказывается, полное метрическое пространство может быть гомеоморфно неполному. Пример: $\mathbb{R}$ и $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, гомеоморфизм между которыми осуществляет функция $y = \operatorname{arctg} x$. Мы вернёмся к этому примеру в дальнейшем, когда будем обсуждать понятие компактности в метрических и топологических пространствах.

3. Дальнейшие примеры на сходимости и замыкания.

8. Рассмотрим уже известные нам пространства последовательностей l^p $(p \geqslant 1)$, m и c_0 и зададимся следующими вопросами. 1) Какому из пространств принадлежат x_n, y_n, z_n? 2) В каких из пространств последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся?

а) $x_n = \left\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots\right\}$

б) $y_n = \left\{\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots\right\}$

в) $z_n = \left\{\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, 0, \ldots\right\}$, $\alpha > 0$

Очевидно, элементы всех трёх последовательностей принадлежат всем трём пространствам. Теперь ответим на вопросы о сходимости.

Последовательность $\{x_n\}$ не сходится ни в каком пространстве. Так, в l^p она даже не является ограниченной: очевидно, $\rho_{l^p}(x_n, \{0, 0, \ldots\}) \to +\infty$. (Ср. с задачей 1.) В двух других пространствах, как это часто бывает, легче проверить отсутствие фундаментальности. Имеем

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \rho_m(x_n, x_{n+p}) = \rho_{c_0}(x_n, x_{n+p}) = 1.$$

Последовательность $\{y_n\}$, очевидно, сходится к элементу $\{0, 0, \ldots\}$ в пространствах m и c_0.

Исследуем её сходимость в l^p. Имеем

$$\rho_{l^p}\left(\{0,0,\ldots\},u\right)=\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\cdot n\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Следовательно, сходимость в l^p к той же последовательности имеет место.

Последовательность $\{z_n\}$, очевидно, сходится к элементу $\{0,0,\ldots\}$ в пространствах m и c_0. Исследуем её сходимость в l^p. Имеем

$$\rho_{l^p}\left(\{0,0,\ldots\},u\right)=\left(\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p\cdot n\right)^{\frac{1}{p}}=n^{-\alpha+\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Следовательно, сходимость в l^p к той же последовательности заведомо имеет место при $p>\frac{1}{\alpha}$. А что происходит при остальных $p\geqslant 1$? Для ответа на этот вопрос сделаем следующее важное замечание. Имеет место вложение пространств $l^p\subset m$ (почему?) и, более того, принадлежность последовательности $u\equiv\{u^{(k)}\}$ пространству l^p гарантирует наличие среди чисел $u^{(k)}$ числа с максимальным модулем и оценку $\max_k|u^{(k)}|\leqslant\rho_{l^p}\left(\{0,0,\ldots\},u\right)$ (почему), или

$$\rho_m\left(\{0,0,\ldots\},u\right)\leqslant\rho_{l^p}\left(\{0,0,\ldots\},u\right).$$

Но отсюда сразу следует, что если $z_n\to z$ в l^p, то $z_n\to z$ в m. Следовательно, или $z_n\to\{0,0,\ldots\}$, или $\{z_n\}$ вовсе не сходится в l^p, но других пределов она точно иметь не может. Но в силу (9) мы знаем, что при $1\leqslant p\leqslant\frac{1}{\alpha}$ сходимость $z_n\to\{0,0,\ldots\}$ не имеет места. Следовательно, в этом случае $\{z_n\}$ не имеет предела в l^p.

9. Назовём финитной числовую последовательность, все элементы которой, кроме конечного числа, равны 0. (Равносильное условие: все элементы, начиная с некоторого, равны 0.) Поставим вопрос: как устроены замыкания множеств финитных последовательностей в l^p и в m? Нетрудно проверить, что в первом случае ответом будет всё пространство l^p, а во втором — пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей. Отметим попутно, что тем самым мы доказались, что в обоих пространствах множества финитных последовательностей не являются замкнутыми.

Свойства метрических пространств, связанные с компактностью (полная ограниченность, сепарабельность, пространства непрерывных функций и теорема Арцела), будут рассмотрены в дальнейшем, при изучении общего понятия компактности для топологических пространств. То же относится к понятию базы и аксиомам счётности.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на вопросы в тексте.

1. Множество в метрическом пространстве называется ограниченным, если существует шар, в котором оно целиком содержится. Аналогичное определение формулируется для последовательности. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.

2. Доказать, что если $x_n \to x$, то и всякая её подпоследовательность сходится к x.

3. 1) Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в метрическом пространстве M и известно, что некоторая её подпоследовательность сходится к x. Доказать, что $x_n \to x$.
2) Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в метрическом пространстве M и известно, что некоторая её подпоследовательность сходится к x, а некоторая другая её подпослдеовательность сходится к y. Доказать, что $x = y$ и $x_n \to x$.

4. Пусть $\rho(x, y)$ — метрика в некотором метрическом пространстве. Доказать, что тогда

$$\rho'(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

— тоже метрика, причём класс сходящихся последовательностей при этих двух метриках один и тот же и предел у каждой сходящей последовательности не меняется.

5. Являются ли а) сжимающими, б) непрерывными следующие отображения пространства $C[0; 1]$ в себя:
1) $F(y)(x) = \int_0^x y(\xi)\, d\xi$;
2) $F(y)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(x - \xi) y(\xi)\, d\xi$;
3) $F(y)(x) = \frac{1}{2} \int_0^x y^2(\xi)\, d\xi$?

6. Доказать, что оператор дифференцирования непрерывен как отображение из $C^1[a; b]$ в $C[a; b]$ (со стандартным расстоянием). Верно ли аналогичное утверждение при действии из подмножества непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a; b]$ в пространство $C[a; b]$?

7. Доказать существование и единственность решения $x \in \mathbb{R}$ уравнения

$$2x + \sin x = 1.$$

Будет ли это доказательство верным при поиске решения в $\mathbb{C}$? В $\mathbb{Q}$. ограничен.)

8. Доказать, что если

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1,$$

то бесконечная система уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^1$ при всякой фиксированной $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l^1$.

9*. Пусть λ_k, $k = 1, \ldots, m$, — собственные значения матрицы A, причём среди них нет единичного. Доказать, что последовательные приближения

$$x_n = A x_{n-1} + y$$

сходятся к решению СЛАУ $(I - A)x = y$ при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда все собственные значения по модулю меньше единицы.

10. На столе на кафедре лежит карта Москвы. Доказать, что её можно проткнуть иголкой так, что проткнутая точка на карте будет соответствовать (в смысле картографического изображения) проткнутой точке на столе.

11. Дать определение предела и непрерывности функции со значениями в метрическом пространстве ($F : \mathbb{R} \to M$) и доказать для этого случая (если пространство M полно) критерий Коши существование предела функции в точке $t_0 \in \mathbb{R}$.

12. Сформулировать и доказать утверждение о непрерывности композиции непрерывных функций.

13*. Доказать, что любое счётное пересечение всюду плотных открытых множеств в метрическом пространстве всюду плотно.

14. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ пересечение вложенных непустых ограниченных замкнутых множеств всегда непусто (независимо от стремления их диаметров к нулю).

15. Будут ли данные условия равносильны условию непрерывности отображения (всюду):
1) прообраз любого замкнутого множества замкнут;
2) образ любого открытого множества открыт?

16*. Ввести на интервале $(-1; 1)$ метрику (расстояние) таким образом, чтобы он стал полным метрическим пространством.

17. Доказать, что множество ограниченных функций, действующих из метрического пространства M_1 в метрическое пространство M_2, с sup-расстоянием само есть метрическое пространство, причём в случае полноты M_2 оно полно.