ЛЕКЦИЯ 5А

Топологические пространства — 1. Примеры

1. Примеры и простейшие свойства топологических пространств

1. Любое метрическое пространство M является топологическим пространством, если называть открытыми ровно те его подмножества, которые являются открытыми в смысле метрического пространства. Действительно, в силу леммы о топологии (название не случайно!) семейство открытых множеств в метрическом пространстве удовлетворяет аксиомам топологии.

2. Обсудим на очень простом и наглядном примере основные понятия теории топологических пространств. Для этого введём на множестве $\{0,1\}$ двух элементов (которые мы будем называть точками) все возможные топологии. Итак, пусть $X=\{0,1\}$, $T_k=(X,\tau^{(k)})$, $k=1,\ldots,4$, где

$$\tau^{(1)}=\{\varnothing,X\}\,;\quad \tau^{(2)}=\{\varnothing,X,\{0\}\}\,;\quad \tau^{(3)}=\{\varnothing,X,\{1\}\}\,;\quad \tau^{(4)}=\{\varnothing,X,\{0\},\{1\}\}\,. \tag{1}$$

Легко проверить, что все четыре введённые топологии удовлетворяют аксиомам топологии. Также легко видеть, что $\tau^{(1)}$ — слабейшая (антидискретная) топология, $\tau^{(4)}$ — сильнейшая (дискретная), а топологии $\tau^{(2)}$ и $\tau^{(3)}$ сильнее слабейшей и слабее сильнейшей и не сравнимы между собой.

Отметим, что между пространствами T_2 и T_3 можно установить изоморфизм (взаимно однозначное соответствие, являющееся непрерывной функцией с непрерывной обратной): $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=0$. Для любой другой пары пространств из $T_1,\ldots,T_4$ такого соответствия установить нельзя. В самом деле, для возможности такого соответствия необходимо наличие одинакового количества различных открытых подмножеств с заданным количеством элементов.

Теперь найдём базы для каждой из этих четырёх топологий. Получим соответственно

$$\mathfrak{B}^{(1)}=\{\varnothing,X\}\,;\quad \mathfrak{B}^{(2)}=\{\varnothing,X,\{0\}\}\,;\quad \mathfrak{B}^{(3)}=\{\varnothing,X,\{1\}\}\,;\quad \mathfrak{B}^{(4)}=\{\varnothing,\{0\},\{1\}\}\,.$$

Можно заметить, что в случаях 1—3 другой выбор баз невозможен, тогда как в последнем случае можно было положить

$$\mathfrak{B}_4'=\{\varnothing,\{0\},\{1\},X\}\,.$$

(Важно понимать, что 1) база не обязана обладать свойством «минимальности», 2) базу можно выбрать не единственным образом.)

Укажем также все окрестности элементов 0 и 1 в каждом из пространств $T_1,\ldots,T_4$:

$$\begin{array}{lll}
1) & \tau_0=\{X\}\,, & \tau_1=\{X\}\,,\\
2) & \tau_0=\{\{0\},X\}\,, & \tau_1=\{X\}\,,\\
3) & \tau_0=\{X\}\,, & \tau_1=\{X,\{1\}\}\,,\\
4) & \tau_0=\{\{0\},X\}\,, & \tau_1=\{X,\{1\}\}\,.
\end{array} \tag{2}$$

Построим ещё и локальные базы в каждой точке для каждой из четырёх топологий:

$$\begin{array}{lll} 1) & \nu_0 = \{X\}\,, & \nu_1 = \{X\}\,, \\ 2) & \nu_0 = \{\{0\}\}\,, & \nu_1 = \{X\}\,, \\ 3) & \nu_0 = \{X\}\,, & \nu_1 = \{\{1\}\}\,, \\ 4) & \nu_0 = \{\{0\}\}\,, & \nu_1 = \{\{1\}\}\,, \end{array}$$

причём в каждом из случаев 2–4 можно было добавить множество X в каждую из локальных баз. Таким образом, $\nu_x \subset \tau_x$ и не исключается случай $\nu_x = \tau_x$.

Снова вернёмся к формулам (2). Мы увидим, что лишь в пространстве T_4 точки 1 и 0 имеют непересекающиеся окрестности.

Определение. Топологическое пространство $T = (x, \tau)$ называется *отделимым* (или *Хаусдорфовым*), если любые две его различные точки имеют непересекающиеся окрестности. Как видно, в рассматриваемом примере отделимо лишь пространство T_4. С другой стороны (см. лекцию 4б), всякое метрическое пространство отделимо. Отсюда следует очевидный вывод:

отделимость является необходимым условием
метризуемости топологического пространства.

Отметим, что пространство T_4 можно метризовать стандартным расстоянием: $\rho(0,0) = 0$, $\rho(1,1) = 0$, $\rho(0,1) = 1$. (Имеется в виду, что так введённое расстояние порождает в точности топологию $\tau^{(4)}$.) Никакую из оставшихся трёх топологий нельзя задать ни одним возможным введением расстояния на множестве X (при условии, конечно, что расстояние удовлетворяет аксиомам метрики).

Теперь для каждого из пространств $T_1, \ldots, T_4$, пользуясь определением замкнутого множества (дополнение открытого) составим список замкнутых множеств:

$$\sigma^{(1)} = \{\varnothing, X\}\,; \quad \sigma^{(2)} = \{\varnothing, X, \{1\}\}\,; \quad \sigma^{(3)} = \{\varnothing, X, \{0\}\}\,; \quad \sigma^{(4)} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{1\}\}\,. \qquad (3)$$

Сравнивая (1) и (3), видим, что лишь пространство T_4 является несвязным: только в нём есть открыто-замкнутые множества, отличные от $\varnothing$ и X ($\{0\}$ и $\{1\}$).

Имея список замкнутых множеств, легко построить список замыканий всех множеств в каждом из пространств $T_1, \ldots, T_4$. Чтобы сократить запись, напомним, что

в любом топологическом пространстве (X, τ) *верно:* $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$.

Теперь можем приступить к нахождению замыканий остальных множеств (замыкание — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество):

$$\begin{array}{lll} 1) & \overline{\{0\}} = X, & \overline{\{1\}} = X \\ 2) & \overline{\{0\}} = X, & \overline{\{1\}} = \{1\} \\ 3) & \overline{\{0\}} = \{0\}, & \overline{\{1\}} = X \\ 4) & \overline{\{0\}} = \{0\}, & \overline{\{1\}} = \{1\}. \end{array}$$

3. Привести пример топологического пространства и множества в нём:
1) не открытого и не замкнутого;
2) открытого и замкнутого.

Мы приведём два примера в каждом из случаев. Именно, положим

$$\begin{aligned} &T_1 = [0;1] \cup (2;5] \quad \text{с естественной метрической топологией}, \\ &T_2 = (X, \tau), \quad X = \{a, b, c\}, \tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}. \end{aligned}$$

В первом примере аксиомы топологии выполняются автоматически (каждое метрическое пространство является топологическим, как отмечалось выше). Во втором же их выполнение легко проверить непосредственно. Тогда примерами случаев 1), 2) могут служить соответственно 1) $(3;4]$, 2) $(2;5]$ в пространстве T_1 и 1) $\{a,b\}$ или $\{b\}$, 2) $\{b,c\}$ или $\{a\}$ в пространстве T_2. Примером для случая 2), конечно, всегда будут всё пространство и пустое множество. Наличие других примеров к случаю 2) показывает, что пространства T_1 и T_2 несвязны. Отметим ещё, что пространство T_1 отделимо (как всякое метрическое пространство), пространство T_2 неотделимо (точки b, c не имеют непересекающихся окрестностей).

4. Для пространства T_2 из предыдущего примера построить замыкание каждого из подмножеств.

Имеем, как всегда, $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$ и далее

$$\begin{aligned} &\overline{\{a\}} = \{a\}, &&\overline{\{b\}} = \{b, c\}, \\ &\overline{\{c\}} = \{b, c\}, &&\overline{\{a, b\}} = X, \\ &\overline{\{a, c\}} = X, &&\overline{\{b, c\}} = \{b, c\}. \end{aligned}$$

5. Рассмотрим множество $X = [0;1]$ и объявим в нём открытыми пустое подмножество и всякое подмножество, получающееся из X удалением конечного или счётного множества точек. Легко проверить, что такое определение топологии корректно. Рассмотрим подробнее свойства полученного топологического пространства T.

Ясно, что T не является отделимым. В самом деле, пусть $x \in X$ произвольно. Любая её окрестность O_x (которая заведомо непуста, ибо $x \in O_x$) содержит все точки множества X, кроме конечного или счётного числа. Но тогда любая окрестность O_y точки y — она тоже содержит все точки множества X, кроме конечного или счётного числа, — не может целиком содержаться в $X \setminus O_x$, а следовательно, $O_x \cap O_y \neq \varnothing$, что и означает нехаусдорфовость пространства T. Аналогичное рассуждение показывает, что замыканием любого несчётного подмножества A в T является всё X: дополнение любой окрестности любой точки не более чем счётно и поэтому не может содержать A, и следовательно, A и эта окрестность пересекаются.

Отметим ещё одну особенность пространства T, резко отличающую его от метрических пространств. Оказывается, что замыкание множества A в T уже нельзя охарактеризовать присоединением к A всех пределов таких последовательностей $\{x_n\}$, что $x_n \in A$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, рассмотрим $A = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Из вышеприведённых рассуждений получаем, что $\overline{A} = X$.

С другой стороны, сходящимися в T являются лишь постоянные с какого-то номера последовательности. Чтобы это доказать, дадим сначала определение сходимости последовательности в топологическом пространстве.

Определение. Говорят, что $x_n \to x$ в T, если

$$\forall O_x \in \tau_x \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ x_n \in O_x.$$

Теперь очевидно, что если неверно, что последовательность $\{x_n\}$ принимает с некоторого номера лишь значения x, то она не сходится к x: достаточно положить $O_x = X \setminus (\{x_n\} \setminus \{x\})$.

В то же время, ясно, что последовательности, равные x с некоторого номера N_0, действительно сходятся к x: достаточно положить $N = N_0$ для любой окрестности O_x.

Замечание. Рассмотренный пример ещё раз показывает, что на одном и том же множестве можно ввести топологии совершенно различным образом, и полученные топологические пространства будут обладать совершенно различными свойствами. (Сравните рассмотренное пространство с пространством, получаемым из X введением стандартной метрики.)

Задачи для самостоятельного решения

1. Перечислить все возможные топологии в множестве из 3-х и 4-х элементов и указать среди них отделимые.

2. В предыдущем примере для нескольких построенных пространств указать замыкания всех подмножеств.

3. 1) Доказать, что если пространство отделимо, то всякая последовательность его элементов имеет не более одного предела.
2) Привести пример неотделимого пространства, в котором, тем не менее, всякая последовательность имеет не более одного предела.

Замечание. Как мы уже отметили выше, последовательности не всегда адекватно соотносятся с топологией (замыкание множества A уже нельзя характеризовать как присоединение пределов всех последовательностей элементов). Однако далее мы выясним, что можно заменить последовательности на направленности. Они играют для топологических пространств ту же роль, что и последовательности — для метрических.

4*. (Продолжение.) Показать, что в пространствах со счётной локальной базой замыкание может быть описано с использованием последовательностей. Показать, где конкретно это доказательство не проходит в последнем примере.

5*. Доказать, что топологическое пространство из последнего примера не удовлетворяет I аксиоме счётности.

6*. Доказать, что замыкание множества можно описать в терминах сходящихся последовательностей (как именно) тогда и только тогда, когда топологическое пространство удовлетворяет I аксиоме счётности.