ЛЕКЦИЯ 5В

Топологические пространства — 3. Частичный порядок. Наименьшие топологии. Направленности

1. Частичный порядок

Напомним

Определение. Говорят, что на множестве R задано *отношение частичного порядка*, если для некоторых пар (x, y) элементов множества R сказано, что $x \leqslant y$, причём выполнены следующие условия:
1) $\forall x \in R\ x \leqslant x$;
2) $\forall x, y \in R\ x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y$;
3) $\forall x, y, z \in R\ x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$.

Замечания.
1. Говорят о частичном порядке, потому что не обязательно любые два элемента $x, y \in R$ сравнимы, т. е. не для каждой пары элементов $x, y \in R$ верно хотя бы одно из соотношений $x \leqslant y$, $y \leqslant x$. Если в R сравнимы все пары элементов, то такое отношение порядка называется *линейным порядком.* Очевидно, линейный порядок представляет собой частный случай частичного порядка.
2. В дальнейшем без всяких оговорок будем употреблять запись $y \geqslant x$ в качестве синонима записи $x \leqslant y$.
3. Иногда говорят «x меньше y» и пишут «$x < y$», имея в виду, что $x \leqslant y$ и при этом $x \neq y$.

Примеры.

1. Множество натуральных чисел с обычным порядком является частично (и даже линейно) упорядоченным множеством.

2. То же верно для множества действительных чисел.

3. Введём отношение частичного порядка между числовыми функциями на некотором множестве X следующим образом: $f \leqslant g$, если при всех $x \in X$ верно числовое неравенство (понимаемое в обычном смысле) $f(x) \leqslant g(x)$. Проверьте, что все условия выполнены. Очевидно, что найдутся несравнимые функции: например, при $X = [0; 1]$ можно взять $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$.

4. Введём отношение частичного порядка между парами действительных чисел так: $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если одновременно $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$. Снова легко проверить, что все условия выполняются; при этом, например, элементы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ не сравнимы.

5. На том же множестве можно ввести и отношение линейного порядка. Например, положим $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если
1) либо $x_1 < x_2$,
2) либо $x_1 = x_2$, $y_1 \leqslant y_2$.
Такое отношение порядка называется лексикографическим (по такому принципу расположены слова в словарях).

6. Часто бывает полезно установить отношение частичного порядка между подмножествами некоторого множества, а именно, считать, что $A \leqslant B$, если $A \subset B$ (или, наоборот, если $A \supset B$). В первом случае говорят, что система подмножеств *упорядочена по включению*, во втором условимся говорить об упорядочении по обратному включению. В более сложном случае эти подмножества могут быть наделены некоторой структурой, которая, например, сохраняется при произвольном пересечении (подпространства линейного пространства, кольца подмножеств данного множества, топологии и т. п.) или объединении (открытые подмножества данного метрического или топологического пространства).

Обсудим теперь понятия наименьшего и минимального элементов в частично упорядоченном множестве.

Определение. Элемент a частично упорядоченного множества R называется *наименьшим элементом* в множестве R, если выполнены 2 условия:
1) a сравним со всеми элементами R;
2) для любого $x \in R$ верно $a \leqslant x$.
(Условие 1) следует из 2), но мы предпочли его явно выделить.)

Определение. Элемент a частично упорядоченного множества R называется *минимальным элементом* в множестве R, если
для любого $x \in R$ из $x \leqslant a$ следует $x = a$.
Как видно, последнее условие можно переформулировать так: в R нет элементов, (сравнимых с a и) меньших a.

Очевидно:
1) всякий наименьший элемент есть минимальный (обратное неверно);
2) наименьший элемент единствен (для минимального, вообще говоря, неверно).

Аналогичным образом определяются наибольший и максимальный элементы.

Построим пример, иллюстрирующий возможную ситуацию. На рис. 1 изображено 6 точек, соединённых стрелками. Будем считать, что точка x меньше точки y, если из x в y можно дойти по стрелкам (в указанном направлении). При этом, как обычно, $x \leqslant y$ допускает, кроме указанного «меньше», и равенство. Тогда мы получим отношение частичного порядка. Легко видеть, что элемент a является наименьшим (и, тем самым, минимальным), причём других наименьших и даже минимальных элементов нет. Элементы b и c являются максимальными, и ни один из них не является наибольшим. Однако если (вновь спасибо слушателям!) соединить стрелкой b и c (в направлении от b к c), то c станет наибольшим элементом (оставаясь при этом, конечно, максимальным), а b статус максимального элемента утратит (см. рис. 2).

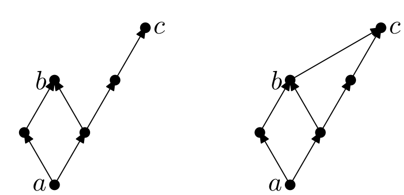

Рис. 1 Рис. 2

Заметим в отношении приведённых ранее примеров, что в тех случаях, когда мы имеем дело с системой подмножеств (подпространств, колец и т. п.), замкнутой относительно пересечения и упорядоченной по включению, всегда имеется наименьший элемент — пересечение. Действительно, при любом $\gamma \in \Gamma$ имеем $\cap_\gamma A_\gamma \subset A_\gamma$. Наоборот, для системы всех открытых подмножеств множества X имеем наибольший элемент — объединение (совпадающее с X).

2. Наименьшие топологии. Предбазы

Обсудим теперь один интересный с токи зрения топологических пространств пример. Легко видеть, что пересечение (но не объединение![1]) топологий есть снова топология. Далее, пусть имеются множество X и топологическое пространство T_3. Рассмотрим некоторое фиксированное отображение $f : X \to T_3$. Можно ли ввести топологию на X так, чтобы f было непрерывным? Конечно: достаточно ввести на X дискретную топологию. Тогда прообраз любого открытого множества в T_3, будучи некоторым подмножеством X, автоматически будет открытым.

Сделаем теперь следующий шаг. Заметим, что если $f : (X, \tau_1) \to T_3$ непрерывно и $\tau_2 \supset \tau_1$, то и $f : (X, \tau_2) \to T_3$ непрерывно. Действительно, все прообразы открытых множеств пространства T_3 как были открытыми в τ_1, так и остались таковыми в более сильной топологии τ_2. Поэтому если в какой-то топологии в пространстве X отображение f непрерывно, то оно будет непрерывно и во всякой более сильной топологии. Возникает вопрос: а нельзя ли найти в X самую слабую топологию, в которой f ещё непрерывно? Можно! Рассмотрим класс $\mathfrak{T}$ всех топологий в X, в которых f непрерывно. Он непуст: в нём содержится по крайней мере дискретная топология. Рассмотрим теперь топологию

$$\tau = \cap_{\tau_\alpha \in \mathfrak{T}} \tau_\alpha.$$

По ранее доказанному τ — топология. Очевидно и то, что τ — наименьший по включению элемент в классе $\mathfrak{T}$. Наконец, $f : (X, \tau) \to T_3$ непрерывно. В самом деле, если каждая топология τ_α содержит прообразы всех открытых в T_3 множеств, то же верно и для пересечения всех топологий τ_α. Тем самым мы установили, что в (непустом!) классе топологий на множестве X, для которых отображение $f : X \to T_3$ непрерывно, имеется наименьший по включению элемент, который естественно назвать *слабейшей топологией, в которой отображение f непрерывно.*

Вспомним теперь введённое в предыдущей лекции понятие предбазы и покажем, что если семейство подмножеств $\mathfrak{S}$ множества X является предбазой некоторой топологии $\tau\,(\mathfrak{S})$, то τ_0 — наименьшая (по включению) топология, содержащая все множества семейства $\mathfrak{S}$.

Действительно, топология τ_0 в силу замечания после теоремы 6 предыдущей лекции состоит в точности из всех объединений всех конечных пересечений множеств из $\mathfrak{S}$. С другой стороны,

[1] Рассмотреть пример $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, $\tau_1 = \{\varnothing, \{b\}, X\}$.

всякая τ топология, содержащая все множества семейства $\mathfrak{S}$, также содержит все объединения всех конечных пересечений множеств из $\mathfrak{S}$. Следовательно, $\tau_0 \subset \tau$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим несколько примеров на этот счёт. Пусть $X = \mathbb{R}$ и

1) $\mathfrak{S} = \{(a; b)\}$;

2) $\mathfrak{S} = \{[a; b]\}$;

3) $\mathfrak{S} = \{[a; b)\}$.

Требуется построить в каждом случае топологию, предбазой которой является $\mathfrak{B}$.

Легко видеть, что в случаях 1), 3) операция пересечения ничего не добавляет к типам множеств, поэтому семейство множеств S является базой той же самой топологии, для которой оно является предбазой. В первом случае топология $\tau\,(\mathfrak{S})$ состоит из всех открытых (в стандартном метрическом смысле) множеств на прямой, а в третьем — из всевозможных конечных и счётных объединений непересекающихся промежутков вида $(a; b)$ и $[c; d)$. В случае же 2) имеем дискретную (сильнейшую) топологию, т. к. $\tau\,(\mathfrak{S})$ в этом случае содержит все одноточечные множества: $b = [a; b] \cap [c; d]$.

3. Направленное множество. Направленность

Определение. Множество A называется *направленным множеством*, если на нём введено отношение частичного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующему условию:
для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ существует $\alpha \in A$ такое, что $\alpha_1 \leqslant \alpha$, $\alpha_2 \leqslant \alpha$.

Легко видеть, что это условие всегда выполняется, если A — линейно упорядоченное множество: достаточно взять больший из двух элементов. Условие также будет выполнено, если в A имеется наибольший элемент. Однако в общем случае для частичного порядка оно, вообще говоря, не выполнено: в примере на рис. 1 нет элемента x такого, что $a \leqslant x$, $b \leqslant x$. В то же время, семейство всех подмножеств данного множества X является направленным множеством, поскольку для любых A, B верно $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, т. е. $A \leqslant A \cup B$, $B \leqslant A \cup B$. Если бы мы ввели отношение порядка вторым способом (обратное включение), то имели бы $A \leqslant A \cap B$, $B \leqslant A \cap B$.

Замечание. Вовсе не требуется, чтобы α было отлично от α_1 и α_2! В частности, не для всякого α_0 найдётся $\alpha > \alpha_0$. И это не противоречит определению, ибо если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, то можно взять $\alpha = \alpha_0$). Более того, направленное множество может состоять из одного элемента. В этом случае отношение порядка тривиально: $x \leqslant x$.

С учётом замечания легко видеть, что каждое из следующих числовых множеств (с обычным порядком) является направленным: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $[0; 1)$, $[0; 1]$, $-\mathbb{N}$, $\{0; 1\}$. Также направленным множеством является множество $\mathbb{R}^2$ с любым из трёх введённых в примерах 4—6 отношений порядка.

Введём теперь понятие, играющее для топологических пространств приблизительно ту же роль, какую для метрических играет последовательность, и являющееся обобщением этого последнего понятия.

Определение. Функция $\{x_\alpha\} : A \to X$, где A — направленное множество, X — произвольное множество, называется *направленностью.*

В качестве простейшего примера направленности, разумеется, годится последовательность. Однако чуть позже мы увидим, почему последовательностей при построении теории топологических пространств недостаточно.

Введём теперь понятие предела направленности в топологическом пространстве. Но прежде модифицируем определение предела последовательности:

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ в топологическом пространстве T стремится к элементу $x \in T$, если для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки x найдётся такое N, что при всех $n \geqslant N$ верно $x_n \in U_x$.

Замечание. Обычно вместо $n \geqslant N$ пишут $n > N$. Для последовательностей это неважно, ведь $n \geqslant N \Leftrightarrow n + 1 > N$. Однако, как мы выяснили, направленное множество может не иметь элемента, большего данного. Поэтому для предела направленности имеем

Определение. Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}$ в топологическом пространстве T стремится к элементу $x \in T$, если для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки x найдётся такое $\alpha_0 \in A$, что при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ верно $x_\alpha \in U_x$.

Приведём простой пример. Направленность $x_\alpha = \frac{1}{\alpha}$, где $A = (0; +\infty)$ с обычным порядком, $T = (0; +\infty)$ с обычной топологией, сходится к 0 (проверить!).

Докажем ключевую теорему этого семинара.

Теорема. Точка x в топологическом пространстве T является точкой касания для множества M тогда и только тогда, когда найдётся направленность точек множества M, сходящаяся к x.

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Если $x_\alpha \to x$ и при всех $\alpha \in A$ верно $x_\alpha \in M$, то согласно определению сходящейся направленности для всякой окрестности U_x точки x существует такое $\alpha_0 \in A$, что при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ верно $x_\alpha \in U_x$. Существенно, что для самого α_0 имеем $x_{\alpha_0} \in U_x$. В случае предела последовательности мы могли взять произвольное n, большее N. В данном же случае существенно, что можно взять α_0, потому что следующих за ним элементов направленного множества A может и не существовать.

Теперь докажем необходимость. И здесь, как ни странно, доказательство окажется идейно даже более простым, чем для последовательностей в метрических пространствах, где нам нужно было каким-то образом выбирать стягивающиеся к пределу последовательности окрестности. Теперь же мы можем в качестве «индекса», которым «нумеруются» точки направленности, возьмём не что иное, как окрестности U_x, т. е. положим $A = \tau_x$ (множество окрестностей точки x), упорядоченное по обратному включению: $U_{x,\alpha} \leqslant U_{x,\beta}$, если $U_{x,\alpha} \supset U_{x,\beta}$. Естественность такого упорядочения очевидна: нам хочется получить «стягивающиеся» к пределу окрестности. Следует убедиться, что τ_x — действительно направленное множество. В самом деле, частичная упорядоченность очевидна (как для любого семейства подмножеств, упорядоченного по включению или обратному включению). Далее, для любых окрестностей $U_{x,\alpha}$, $U_{x,\beta}$ точки x

их пересечение $U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$ — снова окрестность точки x, т. к. является открытым множеством и содержит x. А согласно нашему упорядочению, $U_{x,\alpha} \leqslant U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$, $U_{x,\beta} \leqslant U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$.

Теперь определим направленность $x_{U(x)}$, взяв для каждой окрестности $U_x \in \tau_x$ точку $x_{U(x)} = y$ из пересечения $M \cap U_x$. Такое y существует, поскольку x – точка касания множества M. Осталось доказать, что построенная направленность (состоящая, заметим, из элементов множества M) сходится x. Но это непосредственно следует из построения, ибо для любой окрестности $U_{x,0}$ точки x можно положить $\alpha_0 = U_{x,0}$ и тогда для любой окрестности $U_x \geqslant U_{x,0}$ имеем в силу построения и введённого отношения порядка $x_{U_x} \in U_x \subset U_{x,0}$, т. е. $x_{U_x} \in U_{x,0}$, что и требовалось.

Теорема доказана.

Рассмотрим, к каким направленностям приводит доказательство теоремы в конкретных случаях.

1. Пусть $T = [0;1]$ с обычной метрической топологией, $X = (0;1]$, $x = 0$. Тогда имеем $A = \{[0;y) \mid 0 < y \leqslant 1\}$, причём можно положить $x_{[0;y)} = \frac{y}{2}$. Легко видеть, однако, что можно построить и последовательность элементов множества X, сходящуюся к 0: $x_n = \frac{1}{n}$.

2. Рассмотрим так называемое *связное двоеточие*, а именно пространство (X, τ), где $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\varnothing, \{b\}, \{a, b\}\}$. Заметим, что в этом пространстве точка a является точкой касания множества $\{b\}$, поскольку единственным открытым множеством, содержащим a, является $X \ni b$. Тогда направленное множество A, построенное в теореме, имеет вид $A = \{X\}$. Соответствующая же направленность точек множества $\{b\}$, сходящаяся к точке a, представляет собой $x_X = b$. Действительно, любая окрестность точки a (а именно, X: других нет) содержит точку b при всех $U_a \geqslant X$ (т. е. при $U_a = X$). С первого взгляда может показаться, что уже в этом примере нет последовательности точек множества $\{b\}$, стремящейся к a. Однако это не так: последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = b$, сходится к a. (Заметим попутно, что и она, и построенная направленность, конечно сходятся и к b. Для пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости Хаусдорфа, это неудивительно.)

3. В качестве третьего примера рассмотрим последний пример из лекции 5а.

Отметим в заключение ещё некоторые факты.

1. Всякая подпоследовательность некоторой последовательности есть её поднаправленность, но не всякая поднаправленность последовательности есть её подпоследовательность: рассмотрим последовательность $\{x_1, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

2. Как и в лекции, отметим без доказательства важнейшую теорему о компактности, обобщающее соответствующее утверждение для метрических пространств.

Теорема. Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая направленность в нём имеет сходящуюся поднаправленность.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, что введённые в примерах 3—6 отношения действительно удовлетворяют аксиомам отношения порядка. Проверить, что в примере 5 мы имеем дело с отношением линейного

порядка.

2. Убедиться, что замкнутые подмножества данного множества X, содержащие заданное множество $A \subset X$, образуют множество, частично упорядоченное по включению. Убедиться, что оно содержит наименьший элемент и что он равен $\overline{A}$.

3. Построить пример, показывающий, что объединение двух топологий может не быть топологией.

4. 1) Показать, что в метрическом пространстве для множества A и его точки касания x найдётся последовательность $\{x_n\}$ точек из A, сходящаяся к x.
2) Можно ли утверждать, что такую последовательность можно выбрать не содержащей точку x?
3) Те же вопросы для случая, когда x — предельная точка множества A.

5. Построить топологию на плоскости, предбазой которой являются:
1) все прямые на плоскости;
2) все полосы на плоскости, т. е. множества точек, удалённых не более чем на некоторое фиксированное расстояние от некоторой прямой.