ЛЕКЦИЯ 12А
Компактность в метрических и нормированных пространствах. Основные идеи

1. Топологическое определение компактности

Напомним (см. лекции 4, 5) основное определение.

Определение 1. Топологическое пространство T называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами (говорят: *открытого покрытия*) можно извлечь конечное подпокрытие.

Введём следующее нужное

Определение. Непустая система замкнутых множеств называется *центрированной*, если любая её конечная подсистема имеет непустое пересечение.

Примером центрированной системы замкнутых множеств может служить система вложенных замкнутых шаров в $\mathbb{R}^n$ или система лучей $\{[n;+\infty)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

В лекции 5 доказана

Теорема. Топологическое пространство T компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

В целях самодостаточности текста и возможности проследить всю логическую цепочку мы напомним здесь доказательство сформулированной теоремы, но прежде заметим, что в общем случае центрированная система замкнутых множеств вполне может иметь пустое пересечение, — достаточно обратиться ко второму примеру три абзаца назад.

Доказательство. Необходимость. Пусть пространство T компактно. Рассмотрим центрированную систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Предположим, что её пересечение пусто: $\cap_{\alpha\in A}F_\alpha=\varnothing$. Тогда в силу соотношений двойственности для $G_\alpha\equiv T\setminus F_\alpha$ имеем

$$\cup_{\alpha\in A}G_\alpha=\cup_{\alpha\in A}T\setminus F_\alpha=T\setminus\cap_{\alpha\in A}F_\alpha=T\setminus\varnothing=T.$$

Итак, $\{G_\alpha\}$ есть открытое покрытие пространства T. Но тогда по условию оно имеет конечное подпокрытие $\{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$ и в силу соотношений двойственности получим

$$T=\cup_{k=1}^n G_{\alpha_k}\quad\Longrightarrow\quad\cap_{k=1}^n F_{\alpha_k}=\varnothing,$$

что противоречит условию центрированности.

Достаточность. Пусть произвольная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Вновь привлекая соотношения двойственности, имеем $\cap_{\alpha\in A}(T\setminus O_\alpha)=\varnothing$. Но тогда система замкнутых множеств $\{T\setminus O_\alpha\}_{\alpha\in A}$, имея пустое пересечение, не является центрированной, т. е. существует подмножество индексов $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset A$ такое, что $\cap_{k=1}^n(T\setminus O_{\alpha_k})=\varnothing$, откуда $\cup_{k=1}^n O_{\alpha_k}=T$. Таким образом, мы извлекли конечное подпокрытие данного покрытия.

Теорема доказана.

Теперь условие непустоты пересечения любой центрированной системы замкнутых множеств в топологическом пространстве можно считать новым определением компактности. Будем условно называть его **определением 1а**.

Сделаем важное для дальнейшего

Замечание. Если в определении 1 заменить слова «из любого покрытия» на «из любого счётного покрытия», то получится определение *счётной компактности*. Совершенно аналогично предыдущему случаю, но ограничиваясь только счётными множествами индексов A, можно доказать следующую теорему.

Теорема. Топологическое пространство T счётно-компактно тогда и только тогда, когда в нём любая счётная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Определения, получающиеся из определений 1 и 1а добавлением требования счётности, назовём **определениями 1′** и **1а′**.

2. Компактные метрические пространства. Определение

К метрическому пространству, естественно, можно применить топологическое определение компактности. Однако в случае метрических пространств удобно пользоваться другими определениями (= критериями) компактности. Постепенно мы установим равносильность для метрических пространств всех приводимых нами определений (критериев) компактности.

Определение 2. Метрическое пространство X называется компактным, если любое его бесконечное подмножество имеет предельную точку.

Замечание. Метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек, следует считать компактным: в нём нет бесконечных подмножеств, а стало быть, для всякого его бесконечного подмножества условие существования предельной точки выполнено. (Для несуществующего объекта верно всё что угодно.)

Определение 2а. Метрическое пространство X называется компактным, если любая последовательность его точек имеет предельную точку (= содержит сходящуюся подпоследовательность).

Предостережение. Обращаем внимание читателя на различия понятий предельной точки последовательности и множества. Так, предельная точка последовательности может не быть предельной точкой *множества* её значений. (Почему? Приведите примеры.)

Докажем равносильность этих определений.

$2 \Rightarrow 2а$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X$. Покажем, что из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Если из неё можно извлечь стационарную подпоследовательность, утверждение тривиально. В противном случае можно утверждать, что множество значений последовательности бесконечно. По условию оно имеет предельную точку $x \in X$. Таким образом, в любой окрестности точки x найдётся элемент последовательности, отличный от x. Уменьшая размеры окрестностей, мы получим, что в любой окрестности таких элементов даже бесконечно много. Тем самым, x — предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

2а $\Rightarrow$ 2. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. Построим последовательность $\{x_n\}$ его элементов так, чтобы среди её членов не было равных. По условию она имеет предельную точку x. Легко видеть, что x является также предельной точкой множества X. В самом деле, по определению предельной точки последовательности в каждой окрестности точки x найдётся бесконечно много членов последовательности. Но в силу нашего выбора они суть *различные* точки множества X. Они не могут все совпадать с x. Тем самым, в любой окрестности точки x имеется хотя бы одна точка $x_n \in X$, отличная от x.

Утверждение доказано.

Пример. Пользуясь определением 2а, нетрудно заметить, что бесконечномерное гильбертово пространство l^2 не является локально компактным[1]. Достаточно доказать некомпактность единичной сферы с центром в нуле. Имеем для элементов стандартного базиса $\|e_k - e_l\| = \sqrt{2}$, а следовательно, из $\{e_n\}$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

3. Компактность и полная ограниченность

Обсудим теперь другой подход к понятию компактности. Для этого нам потребуется ввести ещё некоторые понятия.

Определение. Назовём множество A *ε-сетью* в метрическом пространстве X, если $X = \cup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$, где $B_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.

Определение. Назовём метрическое пространство X *вполне ограниченным*, если в нём для любого $\varepsilon > 0$ найдётся некоторая конечная ε-сеть. (Более новый термин: *сверхограниченное.* Мы будем пользоваться традиционным.)

Нетрудно привести примеры вполне ограниченных множеств: отрезок на прямой или шар в $\mathbb{R}^3$. ε-сети в них можно построить на основе координатной сетки.

Теорема. Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно одновременно полно и вполне ограниченно.

Доказательство. Необходимость. Необходимость полноты очевидна: иначе мы могли бы взять фундаментальную последовательность, не имеющую предела, — и никакая её подпоследовательность не была бы сходящейся. (Поскольку если сходится некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности, то сходится и вся последовательность — см. задачу 3 лекции 4б.) Нетрудно доказать и полную ограниченность. В самом деле, пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ конечной ε_0-сети не существует. Это значит, что можно построить последовательность $\{x_n\} \subset X$, каждый последующий член которой удалён от каждого из предыдущих более чем на ε_0. Но такая последовательность, очевидно, не имеет сходящихся подпоследовательностей.

[1] Векторное топологическое пространство называется локально компактным, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве X существует конечная ε-сеть. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. Построим в X 1-, $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{4}$-сети и рассмотрим соответствующие шары. Поскольку число шаров каждого радиуса конечно, то найдётся шар радиуса 1, содержащий бесконечно много элементов множества Y. Назовём его B_0 и положим $Y_1 = Y \cap B_0$ (Y_1 бесконечно). Далее, найдётся шар радиуса 1/2 центром в элементе $\frac{1}{2}$-сети, содержащий бесконечно много элементов множества Y_1. Обозначим этот шар через B_1 и $Y_2 = Y_1 \cap B_1$. Продолжая указанную процедуру, получим последовательность шаров $\{B_k\}$ радиусов $\frac{1}{2^k}$ (с центрами в точках $\frac{1}{2^k}$-сетей), где каждый шар содержит бесконечно много элементов множества Y. Увеличив радиусы шаров в 4 раза ($\tilde{B}_k$), получим последовательность вложенных (докажем ниже) замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. В силу полноты пространства X эти шары содержат общую точку x, которая, очевидно, и будет предельной для Y.

Осталось доказать, что шары $\tilde{B}_k$ вложены друг в друга. В самом деле, пусть z_k — центр k-го шара. Поскольку $B_k \cap B_{k+1}$ непусто (именно, $B_k \cap B_{k+1} \supset Y_k$), имеем $\rho(z_k, z_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{3}{2}/2^k$. После увеличения радиусов в 4 раза будем иметь тем самым, что все точки шара $\tilde{B}_{k+1}$ удалены от z_k не более чем на $\frac{3}{2}/2^k + \frac{1}{2^{k-1}} = (\frac{3}{2} + 2)/2^k < 4/2^k$. Поэтому $B_{k+1} \subset B_k$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем считать требование полноты и полной ограниченности третьим определением компактности (для метрического пространства).

Определение 3. Метрическое пространство X называется компактным, если оно полно и вполне ограниченно.

Пример. («Гильбертов кирпич») Рассмотрим в пространстве l^2 множество

$$Q = \{x \in l^2 \mid |x_0| \leqslant 1, |x_1| \leqslant \frac{1}{2}, \ldots, |x_k| \leqslant \frac{1}{2^k}, \ldots\}. \tag{1}$$

Оно является компактным.

Покажем, как построить для каждого $\varepsilon > 0$ конечную ε-сеть в Q. Заметим сначала, что если для произвольного $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ положить $[x]_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, то

$$\|x - [x]_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2. \tag{2}$$

В случае $x \in X$ из (1) и (2) имеем

$$\|x - [x]_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

Выберем теперь такое n, что $\frac{1}{3 \cdot 4^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Осталось лишь «построить сеть по оставшимся координатам». Положим

$$R = \{x \in l^2 \mid x_1 = k_1 \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}, \ldots, k_n \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}, 0, 0, \ldots\},$$

где целые числа k_i, $i = \overline{0, n}$, пробегают все значения, при которых $|k_i \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}| \leqslant \frac{1}{2^i}$. Тогда, если $x \in Q$, то расстояние от $[x]_n$ до ближайшего элемента сети будет не больше $\sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon}{2n}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$; с учётом оценки $\|x - [x]_n\|^2 \leqslant \frac{1}{3 \cdot 4^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ и теоремы Пифагора получаем требуемое.

4. Связь между метрическим и топологическим определениями компактности

Установим теперь связь между топологическими и метрическими определениями компактности для метрического пространства.

Для этого нам потребуется 3 вспомогательные леммы.

Лемма 1. Вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно.

Доказательство очевидно: достаточно взять конечные 1-, $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{4}$- и т. д. сети.

Лемма 2. Сепарабельное метрическое пространство имеет счётную базу.

Лемма 3. Пусть топологическое пространство T имеет счётную базу. Тогда из любого его открытого покрытия можно извлечь счётное подпокрытие.

Доказательства лемм 2 и 3 во избежание перегрузки текста вынесены в приложение.

Теперь мы в состоянии доказать, пожалуй, самую интересную теорему данного семинара.

Теорема. «Топологические» и «метрические» определения компактности равносильны (разумеется, в своей общей области применимости — для метрических пространств).

Доказательство.

$1a' \Rightarrow 2$. Пусть X — метрическое пространство, в котором любая центрированная система замкнутых множеств имеем непустое пересечение. Пусть Y — произвольное бесконечное множество в X. Докажем, что оно имеет предельную точку. Образуем последовательность *различных* точек множества Y:

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{3}$$

Построим множества

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\},\ X_2 = \{x_2, x_3, x_4, \ldots\},\ X_3 = \{x_3, x_4, x_5, \ldots\}, \ldots. \tag{4}$$

Тогда, очевидно, их замыкания образуют центрированную систему замкнутых множеств. В силу компактности в смысле «топологического определения» 1a она имеет непустое пересечение. Обозначим через x некоторую точку из указанного пересечения. Значит, x является точкой касания для каждого из множеств (4). Если x не совпадает ни с одной из точек (3), то, очевидно, x является предельной точкой для всех X_n (как точка касания, не принадлежащая множеству), а следовательно, и для Y, т. к. $X_n \subset Y$. Если же имеет место совпадение $x = x_{n_0}$, то в силу попарной различности точек (3) такое совпадение не имеет места больше ни при каком n и для всех X_n, $n > n_0$, $x \notin X_n$. Тогда аналогично предыдущему случаю получаем, что точка x является предельной по крайней мере для X_n, $n > n_0$ (на самом деле всё же для всех, но это не важно), а поэтому и для Y.

$2a \Rightarrow 1$. Итак, пусть в данном метрическом пространстве из любой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Докажем сначала, что в этом случае любая счётная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение ($2a \Rightarrow 1a'$). Пусть Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — замкнутые множества. Рассмотрим множества

$$\Psi_n = \cap_{k=1}^{n} \Phi_k. \tag{5}$$

Их непустота гарантируется центрированностью системы. Выберем в каждом из них произвольным образом по точке $x_n \in \Psi_n$. По условию последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x$. Докажем, что точка x принадлежит всем Φ_n. Поскольку последние замкнуты, достаточно доказать, что x является точкой касания для каждого из множеств Φ_n, т. е. что в любой её ε-окрестности найдётся хотя бы одна точка из Φ_n. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости $x_{n_k} \to x$ при всех k, больших некоторого $K(\varepsilon)$, получим $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$. Но в силу (5) точка x_{n_k} принадлежит *всем* множествам Φ_n, где $n \leqslant n_k$. С другой стороны, условие $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ выполнено также при *всех* $k > K(\varepsilon)$, а для любого N найдётся k, при котором $N \leqslant n_k$. Тем самым показано, что в ε-окрестности точки x найдутся точки всех множеств Φ_n, что и требовалось.

Осталось доказать равносильность компактности и счётной компактности (применительно к метрическим пространствам; в общем случае это неверно!). Но из определения 2а следует 3, поэтому пространство будет сепарабельным, а тем самым (в силу леммы 2) будет иметь счётную базу. Тогда по лемме 3 любое покрытие такого пространства содержит счётное подпокрытие, и мы можем применить предыдущие рассуждения.

Теорема доказана.

Для удобства читателей приведём здесь логическую схему проведённых выше рассуждений.

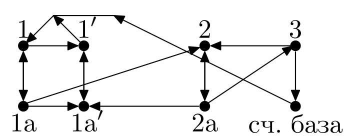

Рис. 1. Логическая схема

5. Компактные *множества* в метрических пространствах

До сих пор мы говорили лишь о компактных пространствах. Дадим теперь определение компактного множества.

Определение. Множество A в метрическом пространстве X называется компактным, если оно компактно как метрическое пространство (с прежней метрикой[2]).

Поскольку компактность в метрических пространствах может быть определена в чисто метрических терминах (обсуждением чего мы занимались выше), то свойство множества (метрического пространства) быть компактным никак не зависит от «вложения» в другие метрические пространства, существенно лишь условие неизменности расстояния. (В случае общих топологических пространств ситуация меняется.)

Поскольку компактное пространство обязано быть полным, то компактное множество A с необходимостью замкнуто. (Очевидно, однако, что замкнутости ещё недостаточно для компактности множества.)

[2]Метрика в пространстве A, «унаследованная» от содержащего его пространства X, называется *индуцированной*.

Однако нередко приходится рассматривать множества, единственным «препятствием» для которых к тому, чтобы быть компактными, является незамкнутость.

Определение. Множество A в метрическом пространстве X называется *предкомпактным*, если его замыкание в X компактно.

Так, например, в $\mathbb{R}$ предкомпактны любой конечный интервал, $[0;1] \cap \mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Внимание! В отличие от свойства компактности, свойство предкомпактности зависит от пространства, содержащего данное множество, что легко проиллюстрировать примером множества $(0;1)$ в пространствах $\mathbb{R}$ и $(0;+\infty)$.

6. Некоторые простые факты

Теорема (Вейерштрасса). Непрерывный образ компактного топологического пространства есть компактное топологическое пространство.

Доказательство. Пусть отображение $f : T_1 \to T_2$ непрерывно, причём образом пространства T_1 является всё T_2. Пусть $\{O_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие пространства T_2. Тогда множества $f^{-1}(O_\alpha)$ открыты в силу непрерывности отображения f и вместе образуют покрытие пространства T_1. В силу компактности последнего из покрытия $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ можно извлечь конечное подпокрытие, но тогда его образ будет покрытием T_2. Тем самым мы извлекли из $\{O_\alpha\}$ конечное подпокрытие.

Теорема доказана.

Следствие. Непрерывный образ компактного множества в метрическом пространстве есть компактное множество в метрическом пространстве образов. В частности, оно ограничено (см. задачу 2) и замкнуто (см. п. 5).

Теорема (Кантора). Функция, непрерывная на компактном метрическом пространстве, равномерно непрерывна.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть выполнено отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x, \tilde{x} \in X \;\; (\rho(x, \tilde{x}) < \delta, \rho(f(x), f(\tilde{x})) \geqslant \varepsilon).$$

Взяв, например, при всех $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n = \frac{1}{n}$ и построив соответствующие последовательности x_n, $\tilde{x}_n$, получим для некоторой сходящейся подпоследовательности $x_{n_k} \to x$:

$$x_{n_k} \to x, \quad \tilde{x}_{n_k} \to x \text{ (в силу } \rho(x_n, \tilde{x}_n) \to 0), \quad f(x_n) \to f(x), \quad f(\tilde{x}_n) \to f(x).$$

Тогда в силу непрерывности расстояния по обоим аргументам в совокупности (см. лекцию 4б) и теоремы о предельном переходе в неравенстве имеем

$$\rho(f(x), f(x)) = \lim_{k \to \infty} \rho(f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k})) \geqslant \varepsilon,$$

что невозможно.

Теорема доказана.

7. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве. Замкнутость конечномерного подпространства в банаховом пространстве

Утверждение. В любом *конечномерном* нормированном пространстве L^n все нормы эквивалентны, т. е. связаны соотношением

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 \ \ \forall x \in L^n \ \ \alpha_1\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \alpha_2\|x\|.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать эквивалентность какой-либо фиксированной нормы всем остальным. Сделаем это для евклидовой нормы $\|x\|_2$. Прежде всего заметим, что произвольная норма $\|x\|$ непрерывна как функция своего аргумента относительно евклидовой нормы: $\lim_{\|x\|_2 \to 0} \|x\| \to 0$. В самом деле, если $e_1, \ldots, e_n$ — элементы ортонормированного базиса, $x_1, \ldots, x_n$ — координаты элемента x в этом базисе, то $\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \to 0$ при $\|x\|_2 \to 0$ в силу очевидной оценки $|x_i| \leqslant \|x\|_2$. В силу теоремы Больцано—Вейерштрасса о компактности ограниченных замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$ единичная сфера $\{x \in L^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ компактна (см. также задачу 3), а в силу теоремы Вейерштрасса о непрерывном образе компактного пространства множество N значений, которые принимает норма $\|x\|$ на единичной относительно $\|x\|_2$ сфере, есть компактное множество действительных чисел. Следовательно, N замкнуто и ограничено. Но тогда, во-первых, N ограничено сверху, а во-вторых, «отграничено» от нуля, поскольку норма ненулевого элемента отлична от нуля. Итак, на единичной относительно евклидовой нормы сфере имеем

$$0 < \beta_1 \leqslant \|x\| \leqslant \beta_2,$$

или

$$\alpha_1\|x\| \leqslant 1 \leqslant \alpha_2\|x\| \tag{6}$$

с $\alpha_1 = 1/\beta_2$, $\alpha_2 = 1/\beta_1$, откуда для произвольного $x \in L^n$ имеем

$$\alpha_1\|x\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant \alpha_2\|x\|.$$

Следствие 1. В конечномерном нормированном пространстве сходимость по норме влечёт сходимость по любой другой норме, которую можно ввести в данном линейном пространстве.

Следствие 2. Из предыдущего следствия вытекает, что сходимость по норме в конечномерном пространстве эквивалентна покоординатной сходимости. В самом деле: это верно для евклидовой нормы (которая может быть введена так, что используемый базис окажется ортонормированным).

Утверждение. В произвольном банаховом пространстве X любое конечномерное линейное подпространство (многообразие) L^m замкнуто (является подпространством).

Доказательство. Требуется лишь доказать, что если некоторая последовательность $\{x_n\} \subset$ $\subset L^m$ сходится по норме X, то её предел принадлежит L^m. Для доказательства этого факта рассмотрим сначала L^m как линейное пространство (линейное многообразие). Легко убедиться, что индуцированная из пространства X норма будет нормой и в L^m. Следовательно, (в силу утверждения об эквивалентности норм) фундаментальная по норме пространства X последовательность будет фундаментальной и по какой-либо евклидовой норме в L^m. Введём в L^m ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=\overline{1,m}}$. Тогда последовательности координат элементов x_n тоже будут фундаментальными, а следовательно, сходящимися. Задаваемый соответствующими пределами элемент $x \in L^m$ будет пределом $\{x_n\}$ в евклидовой норме, а следовательно, и в исходной норме, совпадающей с нормой X. В силу единственности предела имеем $x_n \to x \in L^m$, что и требовалось.

Утверждение доказано.

8. Теорема Арцела

Теорема (Арцела). Пусть заданы функции $f_n : K_1 \to K_2$ и
1) K_1, K_2 — компактные метрические пространства;
2) последовательность функций $\{f_n\}$ является *равностепенно непрерывной*:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, \tilde{x} \in K_1, \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; (\rho_1(x, \tilde{x}) \leqslant \delta \Rightarrow \rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) \leqslant \varepsilon). \tag{7}$$

Тогда из последовательности $\{f_n\}$ можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $f \in C(K_1, K_2)$.

Доказательство.

1. Построим (это возможно в силу компактности K_1) конечные 1-, $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{4}$- и т. д. сети. Упорядочив совокупность точек этих сетей в порядке перечисления и выбрасывая из последовательности повторяющиеся точки, получим счётное всюду плотное в K_1 множество $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_l, \ldots\}$. Для каждого фиксированного l рассмотрим последовательности $\{f_n(x_l)\}$. В силу компактности множества значений K_2 с помощью «диагональной процедуры» (см. ниже) можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая будет сходиться в каждой точке $x_l \in X$:

$$f(x_l) \equiv \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x_l), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Для сокращения записи будем далее обозначать полученную подпоследовательность функций $\{f_{n_k}\}$ одним индексом: $f_k \equiv f_{n_k}$, не смешивая её с исходной последовательностью.

2. Докажем, что полученная функциональная подпоследовательность сходится поточечно при всех $x \in K_1$, а не только при $x_l \in X$, и, более того, сходимость равномерна на K_1. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Пользуясь неравенством треугольника, запишем для произвольного $x \in K_1$:

$$\rho_2(f_k(x), f_m(x)) \leqslant \rho_2(f_k(x), f_k(x_l)) + \rho_2(f_k(x_l), f_m(x_l)) + \rho_2(f_m(x_l), f_m(x)), \tag{8}$$

где x_l будет определено ниже. Пользуясь равностепенной непрерывностью исходной функциональной последовательности (а значит, и выбранной подпоследовательности), найдём такое $\delta > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\rho_1(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < \delta$ будет выполнено $\rho_2(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) < \frac{\varepsilon}{3}$. Найдём первое среди чисел 2^{-j}, $j \in \mathbb{N}$, меньшее δ. Рассмотрим *конечное* множество $X_j \subset X$, состоящее из всех элементов выбранных ранее 1-, $\frac{1}{2}$-, ..., $\frac{1}{2^j}$- сетей в K_1. (Легко видеть, что тогда для каждого $x \in X$ ближайший к нему элемент $x_l \in X_j$ находится на расстоянии меньше δ.) В силу сходимости последовательности $\{f_k\}$ во всех точках множества X_j (поскольку она по построению сходится всюду на X) существует такое $N \in \mathbb{N}$ (зависящее только от ε, но не от x!), что для любых $k, m > N$ *и для любого* $x_l \in X_j$ верно неравенство

$$\rho_2(f_k(x_l), f_m(x_l)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Поскольку ближайший к произвольному фиксированному элементу $x \in K_1$ элемент $x_l \in X_j$ находится на расстоянии ближе δ, то с учётом выбора δ и два остальных слагаемых в (8) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, откуда мы получаем

$$\rho_2(f_k(x), f_m(x)) < \varepsilon \tag{10}$$

при всех $x \in K_1$ и всех $k, m > N(\varepsilon)$. Тем самым установлена «равномерная фундаментальность» последовательности $\{f_k\}$ на K_1. Из этого факта следует сходимость в каждой точке, а также равномерность этой сходимости: для доказательства последней достаточно перейти в (10) к пределу при $m \to \infty$ (уже зная, что он существует поточечно).

Итак, мы доказали, что из данной последовательности можно извлечь равномерно сходящуюся последовательность, предел которой — как равномерный предел непрерывных функций — сам представляет собой непрерывную функцию.

Теорема доказана.

Следствие. Семейство функций из $C(K_1, K_2)$, обладающее свойством равномерной непрерывности (как в условии теоремы) с конкретными $\delta(\varepsilon)$, является компактным (в индуцированной из $C(K_1, K_2)$ метрике).

В самом деле, мы показали, что любая последовательность элементов этого семейства содержит сходящуюся в $C(K_1, K_2)$ подпоследовательность. Осталось доказать, что предел лежит в рассматриваемом семействе. Но это легко следует из предельного перехода в неравенстве $\rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) \leqslant \varepsilon$.

Замечание. Если бы мы использовали в условии теоремы неравенство $\rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) < \varepsilon$, то смогли бы гарантировать лишь предкомпактность соответствующего семейства функций, т. к. неравенство при предельном переходе может стать нестрогим.

9. Теорема Пеано

В качестве примера использования теоремы Арцела докажем теорему Пеано о существовании (локальном) решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Эта теорема не гарантирует единственности, но зато верна в более слабых предположениях относительно правой части уравнения; при этом вместо теоремы о неподвижной точке в доказательстве используется более изощрённая техника, основанная на идее компактности.

Теорема (Пеано). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y). \tag{11}$$

Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области G, то через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит *хотя бы одна* интегральная кривая этого уравнения.

Доказательство. 1. Заметим прежде всего (см. теорему Вейерштрасса, п. 6, и задачи 2, 3), что функция $f(x, y)$, как непрерывная на компактном множестве G, ограничена. Пусть $M > 0$ таково, что всюду в G верно $|f(x, y)| < M$.

2. Построим фигуру $\Delta \subset G$ следующим образом. Проведём через точку (x_0, y_0) прямые с угловыми коэффициентами $\pm M$ и возьмём $a < x_0$, $b > x_0$ так, чтобы затушёванные треугольники лежали целиком в G. Это возможно, т. к. (x_0, y_0) — внутренняя точка области G.

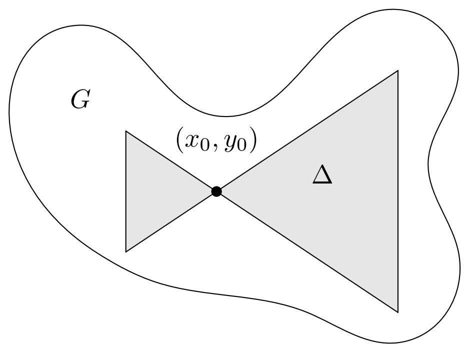

Рис. 2. Фигура Δ

3. Построим последовательность ломаных Эйлера, лежащих в Δ. Именно, из точки (x_0, y_0) проведём отрезок с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до точки (x_1, y_1) (здесь, очевидно, $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$). Затем проведём отрезок с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2). Важно, что каждое следующее звено не может «вылезти» за верхнюю и нижнюю наклонные границы фигуры Δ (почему?). При этом каждый раз будем брать приращение по x «не слишком маленьким» (чтобы достичь абсциссы b за конечное число шагов) и «не слишком большим» (меньше некоторого δ, своего для каждой конкретной ломаной). Аналогично построим часть ломаной и «назад» до абсциссы a. Описанным способом построим бесконечную последовательность ломаных L_n, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через $\varphi_n(x)$ функции (определённые на $[a; b]$), графиками которых являются ломаные L_n.

Заметим, что эти ломаные лежат целиком в пределах фигуры $\Delta \subset G$, «не вылезая» вверх или вниз и даже не соприкасаясь с её наклонными границами (почему?). Тем самым, каждая вершина ломаной оказывается строго внутри углов, образованных этими границами. Более того, функции φ_n являются липшиц-непрерывными с общей константой Липшица M (докажите это аккуратно!).

4. Таким образом, функции $\{\varphi_n(x)\}$ обладают следующими свойствами:

1) они определены на $[a; b]$;

2) они равномерно ограничены;

3) они равностепенно непрерывны.

(Свойства 2), 3) следуют из сказанного в последнем абзаце этапа 3 доказательства.)

В силу теоремы Арцела из последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ можно выделить сходящуюся равномерно на $[a;b]$ подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}(x)\}$. Обозначим её для простоты $\{\psi_k(x)\}$ и положим

$$\psi(x) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(x). \tag{12}$$

Докажем, что эта функция является решением уравнения (11), проходящим через точку (x_0, y_0) (и, тем самым, решением соответствующей задачи Коши).

5. Надо доказать фактически:

$$\forall x' \in (a;b),\, \forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x'' \in [a;b] \cap \big((x'-\delta; x') \cup (x'; x'+\delta)\big)$$
$$\left|\frac{\psi(x'') - \psi(x')}{x'' - x'} - f(x', \psi(x'))\right| < 2\varepsilon.$$

Зафиксируем произвольные $x' \in [a;b]$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $f(x,y)$ и предельного соотношения (12) достаточно доказать, что

$$\exists\delta > 0, \exists K > 0\ \ \forall k > K,\, \forall x'' \in [a;b] \cap \big((x'-\delta; x') \cup (x'; x'+\delta)\big)$$
$$\left|\frac{\psi_k(x'') - \psi_k(x')}{x'' - x'} - f(x', \psi_k(x'))\right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Поскольку f непрерывна в области G, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0$ такое, что при

$$|x - x'| < 2\eta, \quad |y - y'| < 4M\eta \tag{14}$$

(где $y' = \psi(x')$) верно

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon. \tag{15}$$

Условия (14) задают открытый прямоугольник, который мы обозначим Q. При достаточно малом $\eta > 0$ он лежит целиком в Δ.

Выберем теперь $K \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > K$:

1) верно неравенство $|\psi(x) - \psi_k(x)| < 2M\eta$ для всех $x \in [a;b]$,

2) звенья ломаных L_k имеют длины меньше η по координате x.

Тогда при $|x - x'| < 2\eta$ все ломаные L_k с $k > K$ лежат внутри Q (почему?), а следовательно, для любой точки (x,y), лежащей на любой из этих ломаных при $|x - x'| < 2\eta$, выполнено (15).

Рассмотрим теперь конкретную ломаную с некоторым $k > K$. Пусть точки (a_0, b_0), (a_1, b_1),…, (a_{n+1}, b_{n+1}) — её вершины, причём

$$a_0 \leqslant x' < a_1 < \ldots < x'' \leqslant a_{n+1} \tag{16}$$

(для определённости считаем, что $x'' > x'$; случай $x'' < x'$ рассматривается аналогично). Для функции $\psi_k(x)$ имеем

$$\psi_k(a_1) - \psi_k(x') = f(a_0, b_0)(a_1 - x');$$
$$\psi_k(a_{i+1}) - \psi_k(a_i) = f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i), \quad i = \overline{1, n-1};$$
$$\psi_k(x'') - \psi_k(a_n) = f(a_n, b_n)(x'' - a_n).$$

Тогда при $|x' - x''| < \eta$ в силу (15) и того факта, что все вершины (a_0, b_0), (a_1, b_1),…, (a_{n+1}, b_{n+1}) лежат в прямоугольнике Q, имеем

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_1 - x') < \psi_k(a_1) - \psi_k(x') < [f(x', y') + \varepsilon](a_1 - x');$$
$$[f(x', y') - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) < \psi_k(a_{i+1}) - \psi_k(a_i) < [f(x', y') + \varepsilon](a_{i+1} - a_i), \quad i = \overline{1, n-1};$$
$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - a_n) < \psi_k(x'') - \psi_k(a_n) < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - a_n).$$

Сложив эти равенства, получаем:

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') < \psi_k(x'') - \psi_k(x') < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x'),$$

откуда и следует (13).

Теорема доказана.

Замечание. Разные последовательности ломаных Эйлера могут сходиться к разным решениям уравнения (11), и, таким образом, решение может быть не единственно. Рассмотрите пример задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Приложение

Доказательство леммы 2. Достаточно доказать, что базу стандартной метрической топологии в сепарабельном метрическом пространстве X образуют шары B_{nk} с центрами в точках всюду плотной счётной системы $\{x_n\}$ и всевозможными рациональными радиусами r_k, $k \in \mathbb{N}$. С учётом теоремы 2 из лекции 5б и поскольку всякое открытое множество в метрическом пространстве вместе с каждой своей точкой содержит (по определению) некоторый открытый шар, достаточно доказать, что для произвольного открытого шара B и произвольной точки y в нём найдётся шар из рассматриваемого семейства, содержащий точку y и целиком содержащийся в шаре B.

Пусть $B \equiv B_R(x) \subset X$ — шар радиуса R с центром в точке x; пусть y — произвольная точка в этом шаре. Пусть $r = \frac{R - \rho(x,y)}{3}$, тогда:
1) в шаре радиуса r с центром в точке y найдётся точка x_n из счётной системы (поскольку последняя всюду плотна в X);

2) шар с центром в точке x_n радиуса r_k, где $r_k \in \mathbb{Q}$, $r < r_k < 2r$, содержит точку y и лежит целиком в шаре B (докажите самостоятельно!).

Проведя для каждой точки шара B аналогичное построение, мы представим его в виде объединения шаров из системы $\{B_{nk}\}$, что и доказывает, что последняя образует базу (очевидно, счётную).

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть $\{G_n\}$ — счётная база пространства T. Пусть $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — некоторое его открытое покрытие. Тогда для каждого O_α из покрытия существует (по определению базы топологии) представление

$$O_\alpha = \cup_{k\in K_\alpha} G_k, \quad K_\alpha \subset \mathbb{N}. \tag{17}$$

Обозначим $K = \cup_{\alpha\in A} K_\alpha \subset \mathbb{N}$. Поскольку $\{O_\alpha\}$ — покрытие, то имеем

$$T = \cup_{\alpha\in A} O_\alpha = \cup_{\alpha\in A} \cup_{k\in K_\alpha} G_k = \cup_{k\in K} G_k, \quad K \subset \mathbb{N}. \tag{18}$$

Тем самым, подсемейство $\{G_k\}_{k\in K}$ базы топологии является покрытием. Но в силу (17) и $K = \cup_{\alpha\in A} K_\alpha \subset \mathbb{N}$ для каждого $k \in K$ найдётся хотя бы одно такое α_k, что $G_k \subset O_{\alpha_k}$. Следовательно,

$$T = \cup_{k\in K} G_k \subset \cup_{k\in K} O_{\alpha_k} \subset T,$$

или $T = \cup_{k\in K} O_{\alpha_k}$. Мы извлекли из данного покрытия не более чем счётное подпокрытие.

Лемма доказана.

Диагональная процедура. Пусть нам требуется из последовательности функций $\{f_n : K_1 \to K_2\}$ извлечь подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке счётного множества $X = \{x_l\}_{l\in\mathbb{N}}$. Выберем на первом шаге подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \equiv \{f_{n1}\}$, сходящуюся в точке x_1 (это можно сделать, т. к. последовательность $\{f_n(x_1)\} \subset K_2$ лежит в компактном пространстве). Далее выберем *из полученной подпоследовательности* последовательность $\{f_{n2}\}$, $\ldots$, на i-ом шаге — выберем из подпоследовательности $\{f_{n,i-1}\}$ подпоследовательность $\{f_{n,i}\}$, сходящуюся в точке $x_i \in X$. Заметим, что при извлечении подпоследовательностей свойство сходиться в предыдущих точках не терялось.

Запишем теперь полученные последовательности в бесконечный столбец и заметим, что под произвольным элементом записан элемент, номер которого в исходной последовательности не меньше номера рассматриваемого элемента в ней же. (Зачем нужно это замечание?) Рассмотрим теперь «диагональную последовательность», способ построения которой исходя из полученной таблицы ясен из названия, — она будет подпоследовательностью исходной последовательности (почему?), обладающей нужным нам свойством сходимости во всех точках $x_l \in X$ (почему?).

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что любое вполне ограниченное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

2. Доказать, что любое компактное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

3. Как следует из задачи 2 и вышеизложенного материала, любое компактное множество в метрическом пространстве является замкнутым и ограниченным.
1) Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ эти два условия вместе достаточны для компактности множества.
2) Сформулировать достаточное условие предкомпактности в $\mathbb{R}^n$.
3) Привести пример, показывающий, что в общем случае этих двух условий недостаточно для компактности.

4. С помощью «$\frac{\varepsilon}{3}$-приёма» доказать полноту пространства $C(M_1, M_2)$ ограниченных непрерывных функций, действующих из метрического пространства M_1 в полное метрическое пространство M_2.

5. Пусть X — банахово пространство, причём X^* сепарабельно. Как с помощью диагональной процедуры извлечь из ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ слабо сходящуюся?

6. Решить задачу 12 из семинара 8.

7. Пусть M — равномерно ограниченное множество функций в $C[a;b]$. Доказать, что множество функций

$$\left\{ \int_0^t x(\tau)\, d\tau \mid x(t) \in M \right\}$$

предкомпактно в $C[a;b]$.

8. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ на $[a;b]$ таких, что

$$\int_a^b \left((x(t))^2 + (x'(t))^2 \right) dt < k$$

при некотором фиксированном k, предкомпактно в $C[a;b]$.

9. Доказать, что соотношение эквивалентности для норм, заданных на линейном пространстве, действительно является отношением эквивалентности в смысле определения из лекции 1а.