Лекция 2. Абстрактная мера Лебега

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

11 сентября 2012 г.

Введение

На прошлой лекции мы рассмотрели построение меры Лебега плоских множеств. Теперь наша задача обобщить эту процедуру на случай произвольных множеств. При этом существо схемы построения абстрактной меры Лебега почти в точности повторяет схему, рассмотренную на прошлой лекции.

Алгебра множеств

Итак, прежде всего нам нужно ввести класс «элементарных» множеств. С этой целью введем понятия алгебры множеств и $\sigma-$алгебры множеств. Дадим определение.

Определение 1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A}$ множества X называется алгеброй множеств, если выполнены следующие свойства*:

(i) $\emptyset, \ X \in \mathcal{A}$;

(ii) *из принадлежности $A, B \in \mathcal{A}$ вытекает, что $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}$*;

В том случае, если выполнено дополнительное свойство

(iii) *для любой последовательности множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ вытекает, что*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

система множеств $\mathcal{A}$ называется $\sigma-$алгеброй.

Примеры $\sigma-$алгебр

Тривиальными примерами $\sigma-$алгебр является, например, семейство множеств $\mathcal{A}$, состоящее из $\emptyset$, X. Другим тривиальным примером является семейство $\mathcal{A}$, состоящее из всех подмножество множества X, который обозначается как 2^X (почему?).

Мера на σ−алгебре.

Определение 2. *Пара* $(\mathcal{A}, X)$, *где* $\mathcal{A}$ *есть* σ−*алгебра* $\mathcal{A}$ *подмножеств из множества* X, *называется измеримым пространством.*

Определение 3. *Числовая функция* μ, *определённая на измеримом пространстве, называется аддитивной, если для всякого конечного объединения попарно непересекающихся множеств* $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ *имеет место равенство*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Определение 4. *Числовая функция μ, определённая на измеримом пространстве, называется счетно–аддитивной, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ такой, что*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A},$$

имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Определение 5. *Счетно–аддитивная неотрицательная числовая функция μ, заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X, называется мерой.*

Обозначения

Пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра подмножеств из X, на котором задана мера μ, т. е. неотрицательная счетно–аддитивная числовая функция. Это и есть то самое «элементарное» семейство множеств, на котором задана мера μ. Займемся теперь продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на некоторую $\sigma-$алгебру $\mathcal{A}_\mu$, содержащую $\mathcal{A}$.

Определение 6. *Внешняя мера* $\mu^*(A)$ *для каждого подмножества* $A \subset X$ *определяется следующим образом*:

$$\mu^*(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \middle| \ A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \ A_n \in \mathcal{A} \right\}. \qquad (1)$$

Замечание. Из данного определения сразу следует, что для любых множеств $A \subset B \subset X$ верно неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. В самом деле, если $B \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то и $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$. («Монотонность внешней меры».)

Определение 7. *Скажем, что множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу относительно меры μ, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что имеет место следующее неравенство:*

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Множество всех измеримых по Лебегу подмножеств множества X обозначается как $\mathcal{A}_\mu$.

Множества, измеримые по Лебегу

Итак, мы предъявили способ продолжения меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на более широкое семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$, где продолжением меры μ является числовая функция μ^* — внешняя мера. Но для дальнейшего нам необходимо ответить на ряд вопросов. Во–первых, что представляет из себя множество $\mathcal{A}_\mu$? Во–вторых, является ли внешняя мера μ^* мерой на семействе множеств $\mathcal{A}_\mu$? На все эти вопросы отвечает следующая теорема.

Основная теорема

Теорема

Пусть μ *— это конечная* $(\mu(X) < +\infty)$ *и неотрицательная мера на алгебре* $\mathcal{A}$ *подмножеств из множества* X. *Тогда имеют место следующие утверждения*:

(i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, *причем внешняя мера* μ^* *совпадает с мерой* μ *на алгебре* $\mathcal{A}$;

(ii) *семейство множеств* $\mathcal{A}_\mu$ *является* $\sigma-$*алгеброй, причем ограничение* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *является мерой*;

(iii) *мера* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *есть единственное неотрицательное продолжение меры* μ *с алгебры* $\mathcal{A}$ *на* $\sigma-$*алгебру* $\mathcal{A}_\mu$.

Доказательство утверждения (i)-1

Ясно, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, поскольку для каждого $A \in \mathcal{A}$ и всякого $\varepsilon > 0$ можно взять $A_\varepsilon = A$ и тогда

$$\mu(A \triangle A_\varepsilon) = 0 < \varepsilon.$$

Докажем теперь, что внешняя мера μ^* совпадает с мерой μ на алгебре $\mathcal{A}$. Действительно, по построению меры μ^* имеет место неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Доказательство утверждения (i)-2

Пусть $A \in \mathcal{A}$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — такая последовательность, что

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

но тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap A_n.$$

Доказательство утверждения (i)-3

Прежде всего, в силу неотрицательности и аддитивности меры μ имеет место неравенство

$$\mu(A \cap A_n) \leqslant \mu(A_n)$$

Оно следует из тождества $\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus (A \cap A_n)) + \mu(A \cap A_n)$, где все входящие в него множества принадлежат $\mathcal{A}$.

Доказательство утверждения (i)-4

Можно доказать, что из счетной аддитивности и положительности меры μ вытекает счетная полуаддитивность. Действительно, если $A = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то множество A можно представить в виде объединения непересекающихся множеств C_n, где

$$C_1 = B_1, \quad C_n = B_n \setminus \cup_{l=2}^{n-1} B_l,$$

при $n \geqslant 2$, а $\mu(C_n) \leqslant \mu(B_n)$, и воспользоваться определением счетной аддитивности. Тогда имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

И, значит, имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Доказательство утверждения (ii)

Теперь наша задача доказать утверждение (ii): *семейство множеств* $\mathcal{A}_\mu$ *является* $\sigma-$*алгеброй, причем ограничение* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *является мерой.*

Доказательство утверждения (ii)-1

Сначала докажем, что семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является алгеброй. Действительно, сначала докажем, что дополнение измеримого множества измеримо. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

но тогда поскольку $X \setminus A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и имеет место равенство множеств

$$(X \setminus A_\varepsilon) \triangle (X \setminus A) = A_\varepsilon \triangle A,$$

то

$$\mu^*((X \setminus A_\varepsilon) \triangle (X \setminus A)) = \mu^*(A_\varepsilon \triangle A) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$.

Доказательство утверждения (ii)-2

Теперь докажем, что объединение двух измеримых множеств измеримо. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Значит, для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

С другой стороны, имеют место вложения

$$(A \cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon),$$

поэтому в силу монотонности внешней меры μ^* имеют место неравенства:

$$\mu^*((A \cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, поскольку $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}_\mu$.

Доказательство утверждения (ii)-3

Докажем теперь, что $A \cap B \in \mathcal{A}_\mu$. Но это следствие следующего равенства множеств:

$$A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)).$$

Таким образом, $\mathcal{A}_\mu$ — алгебра.

Доказательство утверждения (ii)-4. Доказательство полуаддитивности внешней меры.

При условиях

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

в частности, при

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) < +\infty$$

верно неравенство

$$\mu^*(A) < \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Доказательство утверждения (ii)-4. Доказательство полуаддитивности внешней меры 1.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по определению внешней меры для каждого из множеств $A_n \subset X$ найдется система множеств

$$\{B_{nm}^{\varepsilon}\} \subset \mathcal{A}$$

такая, что

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} B_{nm}^{\varepsilon}$$

и

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Доказательство утверждения (ii)-4. Доказательство полуаддитивности внешней меры 2.

Тогда, поскольку $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} \cup_{m=1}^{+\infty} B_{nm}^{\varepsilon}$, в силу определения внешней меры $\mu^*(A)$ имеем

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right),$$

где в силу свойств сходящихся рядов с неотрицательными членами порядок суммирования не важен, т. е.

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Доказательство утверждения (ii)-4. Доказательство полуаддитивности внешней меры 3.

В силу произвольности ε имеем требуемое неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

т. е. мы доказали счетную полуаддитивность внешней меры.

Доказательство утверждения (ii)-5.

Напомним доказательство следующего неравенства:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B) \qquad (3)$$

для всех $A, B \in X$, для которых $\mu^*(A), \mu^*(B) < +\infty$.
Действительно, справедливы следующие вложения:

$$A \subset B \cup (A \triangle B), \quad B \subset A \cup (A \triangle B),$$

поэтому в силу полуаддитивности внешней меры[1] имеет место неравенства

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B).$$

Стало быть, пришли к (3).

[1] Эта полуаддитивность, очевидно, является частным случаем только что доказанной счетной полуаддитивности.

Доказательство утверждения (ii)-6. Конечная аддитивность внешней меры.

Приступим теперь к доказательству конечной аддитивности внешней меры на $\mathcal{A}_\mu$. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ и $A \cap B = \emptyset$. Нам нужно доказать, что

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

С этой целью нам достаточно доказать, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 1.

Заметим, что имеет место следующее вложение:

$$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \subset (A \cup B) \cup (A \cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \,,$$

поэтому имеет место неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \mu^*((A \cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)), \qquad (4)$$

где A_ε и B_ε удовлетворяют условию

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 2.

С другой стороны,

$$\mu^*((A \cup B)\triangle(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B\triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \qquad (5)$$

Таким образом, из (4) и (5) вытекает оценка снизу

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \varepsilon. \qquad (6)$$

Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 3.

Теперь заметим, что на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ и μ^* совпадают. Поэтому в силу конечной аддитивности меры μ на $\mathcal{A}$ имеет место следующее равенство:

$$\mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon). \quad (7)$$

Заметим, что в силу $A \cap B = \emptyset$ имеет место вложение

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \subset (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon).$$

И поэтому верна следующая оценка сверху:

$$\mu^*(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \leqslant \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 4.

Значит, из (7) приходим к оценке снизу

$$\mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \geqslant \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{8}$$

Но тогда из (6) приходим к такой оценке снизу:

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon) + \mu^*(B_\varepsilon) - 2\varepsilon. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу неравенства (3) имеют место неравенства

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \mu^*(A \triangle A_\varepsilon), \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(B \triangle B_\varepsilon).$$

Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 5.

Стало быть, отсюда приходим к неравенствам

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (9) приходим к следующему неравенству:

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) - 3\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего имеем

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{10}$$

для всех $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ при условии $A \cap B = \emptyset$.

Доказательство утверждения (ii)-7.

Теперь наша задача доказать, что счетное объединение измеримых множеств измеримо. С этой целью нам достаточно рассмотреть случай попарно непересекающихся множеств. Действительно, пусть $A_n \in \mathcal{A}_\mu$, тогда вместо счетного объединения

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

можно взять

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n,$$

где

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Доказательство утверждения (ii)-8.

Ясно, что $\{B_n\} \subset \mathcal{A}_\mu$ и попарно не пересекаются, причем имеет место равенство

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

В силу конечной аддитивности функции μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ и ее монотонности по включению мы приходим к следующим неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \mu^*(X) \leqslant \mu(X) < +\infty$$

в силу конечности меры μ.

Доказательство утверждения (ii)-9.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ сходится. Следовательно, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $n \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu^*(A_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

В силу измеримости конечных объединений измеримых множеств для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^* \left(B \triangle \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Доказательство утверждения (ii)-10.

Следовательно, в силу вложения

$$B\triangle\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\subset\left(B\triangle\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\bigcup\bigcup_{k=n+1}^{+\infty}A_k,$$

конечной аддитивности внешней меры и ее счетной полуаддитивности приходим к неравенству

$$\mu^*\left(B\triangle\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\right)\leqslant\mu^*\left(B\triangle\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mu^*(A_k)\leqslant\varepsilon.$$

Отсюда вытекает измеримость счетного объединения измеримых множеств. Значит, $\mathcal{A}_\mu$ — это $\sigma-$алгебра.

Доказательство утверждения (ii)-11.

Надо, однако доказать, что действительно

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

где

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

при оговоренных выше условиях. Но это действительно так, потому что, во-первых,

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

в силу счетной полуаддитивности внешней меры,

Доказательство утверждения (ii)-12.

а во-вторых, в силу ее «монотонности» и конечной аддитивности

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n),$$

т. е. можно утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

Устремляя N к бесконечности, имеем равенство (35).

Утверждение (iii).

Нам надо теперь доказать утверждение (iii): *Мера* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *есть единственное неотрицательное продолжение меры* μ *с алгебры* $\mathcal{A}$ *на* $\sigma-$*алгебру* $\mathcal{A}_\mu$.

Доказательство утверждения (iii)-1.

Теперь докажем, что μ^* является единственным продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на $\sigma-$алгебру $\mathcal{A}_\mu$. Пусть нет. Тогда существует другая мера ν. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$ и $\varepsilon > 0$ являются фиксированными. Тогда найдется такое множество $B \in \mathcal{A}$, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \varepsilon.$$

В свою очередь это означает, что существует такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{A}$, что

$$A \triangle B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n,$$

причем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство утверждения (iii)-2.

Имеют место следующие неравенства:

$$|\nu(A) - \nu(B)| \leqslant \nu(A \triangle B) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon,$$

поскольку на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ, μ^* и ν совпадают.
Справедливы следующие неравенства:

$$|\mu^*(A) - \nu(A)| \leqslant |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\nu(A) - \nu(B)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Стало быть, меры μ^* и ν совпадают на $\sigma-$алгебре $\mathcal{A}_\mu$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.