Лекция 5. Топологические пространства и их свойства

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

18 октября 2012 г.

Определение 1. Произвольное множество X с выделенной системой подмножеств τ множества X называется топологическим пространством (X, τ), если выполнены следующие свойства:

(i) $X, \emptyset \in \tau$;

(ii) произвольное объединение множеств из τ есть множество из τ;

(iii) конечное пересечение множеств из τ есть множество из τ;

при этом система подмножеств τ называется топологией.

Примеры.

Пример 1. Рассмотрим произвольное множество X и топологию $\tau = \{X, \emptyset\}$. Это топологическое пространство, которое называется антидискретным или слипшимся.

Пример 2. Рассмотрим множество X и топологию $\tau = 2^X$, т. е. τ состоит из всех подмножеств множества X. Это топологическое пространство называется дискретным, поскольку топологии τ принадлежат все одноточечные множества $\{x\}$ при $x \in X$.

Понятие окрестности и локальной базы топологии.

Определение 2. Окрестностью точки $x \in X$ топологического пространства (X, τ) называется произвольное множество $U \in \tau$ такое, что $x \in U$.

Заметим, что задавать всю систему множеств τ довольно трудно на практике, поэтому вводят понятие Фундаментальной Системы Окрестностей (ФСО). С этой целью обозначим через τ_x все множества из топологии τ, содержащие точку x.

Определение 3. Локальной базой топологии в точке $x \in X$ называется семейство множеств $\nu_x \subset \tau_x$ такое, что для всякого $U \in \tau_x$ найдется такое $V \in \nu_x$, что $V \subset U$.

Примеры.

Отметим, что в качестве локальной базы точки x метрического пространства (X, d) можно взять шары

$$O_n\left(x, \frac{1}{n}\right), \; n \in \mathbb{N}.$$

В частности, в качестве локальной базы метрического пространства (X, δ) с дискретной метрикой

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = y\,; \\ 0, & \text{при } x \neq y \end{cases}$$

в качестве локальной базы можно взять одноточечное множество $\{x\}$.

Понятие ФСО.

Теперь мы фиксируем локальную базу окрестностей ν_x в каждой точке x топологического пространства (X, τ). Справедливо представление для этого семейства множеств

$$\nu_x = \{V_{x,\alpha} : \ \alpha \in A_x\},$$

где A_x — это для каждого $x \in X$ семейство индексов, нумерующее семейство множеств ν_x.

Определение 4. Фундаментальной Системой Окрестностей (ФСО) называется семейство множеств

$$\nu = \{V_{x,\alpha} : \ x \in X, \ \alpha \in A_x\}.$$

Теорема о ФСО.

Предположим, что нам задано семейство множеств

$$\nu_x = \{V_{x,\alpha} : \alpha \in A_x\}.$$

Теорема

Семейство множеств $\nu = \{V_{x,\alpha} : x \in X, \alpha \in A_x\}$ является ФСО для некоторой единственной топологии τ, тогда и только тогда, когда выполнены следующие свойства

(i)$_1$ *для любой точки $x \in X$ множество ν_x не пусто и для каждого $V_{x,\alpha} \in \nu_x$ имеем $x \in V_{x,\alpha}$;*

(ii$_1$) *для каждых $V_{x,\alpha_1}, V_{x,\alpha_2} \in \nu_x$ найдется такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что*

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2};$$

(iii$_1$) *для любого $x \in X$ и каждого $V_{x,\alpha} \in \nu_x$ и для любого $y \in V_{x,\alpha}$ найдется $V_{y,\beta} \in \nu_y$, что $V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}$.*

Доказательство теоремы о ФСО-1.

Итак, пусть семейство ν является ФСО для некоторой топологии τ. Тогда свойства (i_1) и $(\mathrm{ii})_1$ очевидны. Докажем, что имеет место свойство $(\mathrm{iii})_1$. Пусть $x \in X$ и $V_{x,\alpha} \in \nu_x$. Тогда поскольку

$$\nu_x \subset \tau_x \subset \tau,$$

то в силу свойства $(\mathrm{i})_1$ для каждого

$$y \in V_{x,\alpha} \subset \tau$$

найдется такое

$$V_{y,\beta} \in \nu_y,$$

что

$$V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}.$$

Таким образом, семейство ν — ФСО.

Доказательство теоремы о ФСО-2.

Докажем утверждение в обратную сторону. Определим топологию τ как такое семейство множеств, что для каждого $x \in U \in \tau$ найдется такое множество

$$V_{x,\alpha} \in \nu_x,$$

что

$$V_{x,\alpha} \subset U.$$

Понятно, что X и $\emptyset$ принадлежат топологии τ. Ясно, что объединение любого числа множеств из τ есть множество из τ.

Доказательство теоремы о ФСО-3.

Докажем теперь свойство (iii) определения топологии.

Пусть $U_1, U_2 \in \tau$ и $x \in U_1 \cap U_2$. Тогда найдутся такие V_{x,α_1} и V_{x,α_2} из ν_x, что

$$V_{x,\alpha_1} \subset U_1 \quad \text{и} \quad V_{x,\alpha_2} \subset U_2.$$

Тогда по свойству $(\mathrm{ii})_1$ найдется такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} \subset U_1 \cap U_2.$$

Стало быть,

$$U_1 \cap U_2 \in \tau.$$

Доказательство теоремы о ФСО-4.

Теперь наша задача доказать, что ν — это ФСО для данной топологии τ. Действительно, в силу свойства $(\mathrm{iii})_1$ имеем

$$\nu_x \subset \tau_x,$$

поскольку для каждого

$$V_{x,\alpha} \in \nu_x$$

и каждой точки $y \in V_{x,\alpha}$ найдется такое

$$V_{y,\beta} \in \nu_y, \quad \text{что} \quad V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}.$$

Стало быть,

$$V_{x,\alpha} \in \tau_x$$

и ν_x — локальная база топологии τ.

Доказательство теоремы о ФСО-5.

Теперь наша задача доказать единственность так введенной топологии τ.

Итак, пусть существуют две топологии τ и $\tau^{'}$, причем $\nu \in \tau$ и $\nu \in \tau^{'}$. Пусть $U \in \tau$, тогда для всякой точки $x \in U$ найдется такое $V_{x,\alpha(x)} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha(x)} \subset U,$$

но тогда

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} V_{x,\alpha(x)} \subset U.$$

Значит,

$$U = \bigcup_{x \in U} V_{x,\alpha(x)} \in \nu \subset \tau^{'}$$

Итак, $U \in \tau^{'}$. Аналогично в обратную сторону.

Важные примеры ФСО.

Пример 3. Рассмотрим множество $\mathbb{C}(X)$ — линейное пространство непрерывных на не пустом множестве X. Введем топологию равномерной сходимости τ, порожденную согласно теоремы о ФСО, следующей системой окрестностей

$$V_{x,\varepsilon} = \left\{ y(t) \in \mathbb{C}(X) : \sup_{t \in X} |x(t) - y(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Соответствующая топология τ называется топологией равномерной сходимости.

Важные примеры ФСО.

Пример 4. Рассмотрим тоже множество $\mathbb{C}(X)$. Пусть

$$\{t_i\}_{i=1}^{n} \subset X,$$

тогда определим ФСО, состоящим из следующих окрестностей

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \left\{ y(t) \in \mathbb{C}(X) : |y(t_i) - x(t_i)| < \varepsilon,\ i = \overline{1,n} \right\}.$$

Соответствующая топология τ_p называется топологией по точечной сходимости. Пространство $\mathbb{C}(X)$, наделенное такой топологией обозначается как $\mathbb{C}_p(X)$.

Когда на одном и том же множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2 возникает вопрос о том, как они соотносятся.

Определение 5. $\tau_1 \geqslant \tau_2$, если имеет место множественное вложение $\tau_2 \subseteq \tau_1$. При этом говорят, что топология τ_1 сильнее топологии τ_2, а топология τ_2 слабее топологии τ_1. Если эти топологии

$$\tau_1 \not\subset \tau_2 \quad \text{и} \quad \tau_2 \not\subset \tau_1,$$

то говорят, что топологии несравнимы. Если же имеет место строгое вложение

$$\tau_2 \subset \tau_1,$$

то говорят, что топология τ_1 существенно сильнее, а топология τ_2 существенно слабее.

Метризуемые топологические пространства.

Определение 6. Топологическое пространство (X, τ) называется метризуемым, если существует такая метрика d, что ФСО, определенное этой метрикой, порождает топологию τ.

Ясно, что в качестве ФСО метрического пространства можно взять такую систему окрестностей, что локально в каждой точке $x \in X$ ФСО состоит из окрестностей

$$V_{x,n} = \left\{ y \in X : \ d(x,y) < \frac{1}{n} \right\}.$$

База топологии.

Несмотря на относительную простоту ФСО на практике для произвольного топологического пространства задать ФСО довольно сложно. Поэтому приходим к необходимости задавать базу топологии.

Определение 7. Базой $\mathfrak{B}$ топологии τ называется такая система множеств, что

$$\mathfrak{B} \subset \tau,$$

причем для каждого $U \in \tau$ найдется такая система множеств

$$\{V_\alpha : \ \alpha \in A\} \subset \mathfrak{B}, \quad \text{что} \quad U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha.$$

Пространства со счетной базой.

Определение 8. Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме счетности, если в каждой точке существует конечная или счетная локальная база.
Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет второй аксиоме счетности, если существует конечная или счетная база.

Метризуемое топологическое пространство (X, τ) является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности. А пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности.

Относительная топология.

Пусть (X,τ) — топологическое пространство, а $A \subset X$ — это некоторое подмножество. Рассмотрим топологию на A, определенную следующим образом:

$$\tau_A = \{V \cap A: \ V \in \tau\}.$$

Такое множество A вместе с введенной топологией τ_A является топологическим пространством

$$(A, \tau_A) \subset (X, \tau).$$

Точки прикосновения и замыкание множества.

Определение 9. Точкой x прикосновения множества A называется такая точка, что для любого $U \in \tau_x$ имеем $U \cap A \neq \emptyset$.

Определение 10. Замыканием множества называется операция добавления к нему всех точек прикосновения.

Свойства замыкания.

Теорема

(i)$_2$ $A \subset \overline{A}$; *если* $A \subset B$, *то* $\overline{A} \subset \overline{B}$; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(ii)$_2$

$$\overline{\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)} \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma, \quad \overline{\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)} \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma.$$

(iii)$_2$

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$$

Доказательство теоремы-1.

Первые два свойства в $(\mathrm{i})_2$ очевидны. Рассмотрим последнее утверждение в $(\mathrm{i})_2$. Действительно, $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Докажем обратное включение. Итак, пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, тогда

$$\overline{A} \cap V \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad V \in \tau_x.$$

Фиксируем некоторую точку $y \in \overline{A} \cap V$, тогда $y \in \overline{A}$ и $V \in \tau_y$. Следовательно,

$$A \cap V \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}.$$

Доказательство теоремы-2.

Докажем теперь первое свойство в $(\mathrm{ii})_2$.

$$A_\gamma \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \Rightarrow \overline{A_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} \Rightarrow \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma}.$$

Докажем теперь второе свойство в $(\mathrm{ii})_2$.

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subset A_\gamma \Rightarrow \overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} \subset \overline{A_\gamma} \Rightarrow \overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma}.$$

Доказательство теоремы-3.

Докажем свойство $(\mathrm{iii})_2$. Действительно, в силу первого свойства $(\mathrm{ii})_2$ имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Докажем обратное вложение. Пусть

$$x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Предположим, что $x \notin \overline{A}_i$ для всех $i = \overline{1, n}$. Значит, найдутся такие $V_i \in \tau_x$, что

$$V_i \bigcap A_i = \emptyset \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau_x$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap V = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcap V \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcap V_i = \emptyset.$$

Значит,

$$x \notin \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Теорема доказана.

Два замечания.

Отметим, что в $(\mathrm{ii})_2$ нельзя заменить вложения на равенства множеств. Действительно,

$$\overline{\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} x\right)} = \mathbb{R}, \quad \text{но} \quad \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \overline{x} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} x = \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}.$$

Кроме того,

$$\overline{\mathbb{Q}\bigcap\mathbb{J}} = \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}}\bigcap\overline{\mathbb{J}} = \mathbb{R}\bigcap\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Замкнутые множества.

Определение 10. Замкнутым множеством $A \in X$ называется множество дополнительное к открытому:

$$A = X \backslash B, \quad B \in \tau.$$

Теорема

Замкнутые множества обладают следующими свойствами:

$(\mathrm{i})_3$ $\emptyset$ *и* X *являются замкнутыми множествами;*

$(\mathrm{ii})_3$ *пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством;*

$(\mathrm{iii})_3$ *объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Замкнутое множество и замыкание множества.

Обозначим семейство всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) через φ.

Теорема

Пусть $A \subset X$. Тогда

(i)$_4$ $\overline{A}$ — *замкнутое множество;*

(ii)$_4$ $\overline{A}$ — *есть минимальное по включению среди всех замкнутых множеств φ, содержащих A.*

Доказательство теоремы (i)$_4$.

Пусть $x \in X \backslash \overline{A}$. Значит,

$$x \notin \overline{A} = \overline{\overline{A}}.$$

Следовательно, найдется такое $V_x \in \tau_x$, что

$$V_x \bigcap \overline{A} = \emptyset,$$

но тогда

$$V_x \subset X \backslash \overline{A}.$$

Следовательно,

$$X \backslash \overline{A} = \bigcup_{x \in X \backslash \overline{A}} V_x \in \tau.$$

Значит, $\overline{A}$ — замкнутое множество.

Пусть

$$A \subset F \in \varphi.$$

Тогда для любой точки

$$x \in X \backslash F$$

имеем

$$\tau_x \subset X \backslash F, \quad (X \backslash F) \bigcap A = \emptyset.$$

Следовательно, $x \notin \overline{A}$ и, значит,

$$\overline{A} \subset F \quad \text{для всех} \quad F \in \varphi.$$

Теорема доказана.

Внутренность множества.

Определение 11. Внутренней точкой x множества $A \subset X$ называется такая точка, что существует $U \in \tau_x$ и

$$U \subset A.$$

Определение 12. Внутренностью $\operatorname{int} A$ множества $A \subset X$ называется совокупность всех внутренних точек множества A.

Теорема

Имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{int} A = X \backslash \overline{X \backslash A}.$$

Доказательство теоремы.

Для любой точки $x \in X$ реализуется одна из возможностей: существует $U \in \tau_x$, что $U \subset \operatorname{int} A$, либо всякая окрестность $U \in \tau_x$ не содержится целиком в $\operatorname{int} A$. Значит, в последнем случае

$$U \bigcap (X \backslash A) \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad U \in \tau_x,$$

но тогда

$$x \in \overline{X \backslash A}.$$

Итак, множества $\operatorname{int} A$ и $\overline{X \backslash A}$ взаимно дополнительны.

Теорема доказана.

Свойства внутренностей множеств.

Теорема

$(\mathrm{i})_5$ $\operatorname{int} A \subset A$; *если* $A \subset B$, *то* $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$; $\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$;

$(\mathrm{ii})_5$

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \supset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma, \quad \operatorname{int}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma.$$

$(\mathrm{iii})_5$

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} A_i$$

Граница множества.

Определение 13. Точка $x \in X$ называется граничной точкой множества A, если для любого $U \in \tau_x$ имеем

$$A \bigcap U \neq \emptyset, \quad X \backslash A \bigcap U \neq \emptyset.$$

При этом множество всех граничных точек множества A обозначается как

$$\partial A.$$

Лемма

Справедливо следующее представление

$$\overline{A} = \operatorname{int} A \bigcup \partial A, \quad \operatorname{int} A \bigcap \partial A = \emptyset,$$

причем ∂A — это замкнутое множество.

Всюду плотные и нигде не плотные множества.

Определение 14. Множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если
$$\overline{A} = X.$$

Определение 15. Множество $A \subset X$ называется нигде не плотным, если
$$\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset.$$

Теорема

Для того чтобы множество $A \subset X$ было нигде не плотным, необходимо и достаточно, чтобы для любого непустого множества $U \in \tau$ нашлось непустое подмножество $V \subset U$, что
$$V \cap A = \emptyset.$$

Доказательство теоремы. Необходимость.

Докажем необходимость. Пусть $A \subset X$ и нигде не плотно и $U \in \tau$ — непустое множество, тогда

$$V = U \backslash \overline{A} \subset U, \quad V \bigcap \overline{A} = \emptyset.$$

Докажем, что $V \in \tau$. Действительно, справедливо следующее представление:

$$V = U \backslash \overline{A} = U \bigcap (X \backslash \overline{A}),$$

но $U \in \tau$, $\overline{A}$ — замкнуто и тогда $X \backslash \overline{A}$ — открыто. Стало быть, V — открыто. Теперь поскольку $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$, то $U \not\subset \overline{A}$, значит,

$$V = U \backslash \overline{A} \neq \emptyset.$$

Доказательство теоремы. Достаточность.

Предположим, что

$$\operatorname{int} \overline{A} \neq \emptyset,$$

тогда

$$U = \operatorname{int} \overline{A} \supset V \in \tau, \quad V \subset \overline{A},$$

но тогда

$$A \cap V \neq \emptyset.$$

Теорема доказана.

Лемма

Множество $A \subset X$ нигде не плотно, тогда и только тогда, когда множество $X \backslash \overline{A}$ всюду плотно.

Определение 16. Отображение

$$f(x) : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

двух топологических пространств (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) называется непрерывным по Коши в точке $x \in X_1$, если для всякой окрестности U_2 точки $f(x) \in U_2$ найдется такая окрестность U_1 точки $x \in U_1$, что имеет место вложение $f(U_1) \subset U_2$.

Определение 17. Функция

$$f(y) : (Y_1, \tau_1) \to (Y_2, \tau_2)$$

называется непрерывной по Хайне в точке $y_0 \in Y_1$, если для произвольной последовательности $\{y_n\} \subset Y_1$, сходящейся в топологическом пространстве (Y_1, τ_1), соответствующая последовательность $\{f(y_n)\} \subset Y_2$ является сходящейся в топологическом пространстве (Y_2, τ_2).

Секвенциальная непрерывность.

Определение 18. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется сходящейся к точке $x_0 \in X$ в топологическом пространстве (X, τ), если для всякой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ имеем $x_n \in U(x_0)$.

Определение 19. Отображение

$$f(x) : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

двух топологических пространств (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) называется секвенциально непрерывным в точке $x_0 \in X_1$, если для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset X_1$, сходящейся к x_0 в топологическом пространстве (X_1, τ_1), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\} \subset X_2$ сходится к точке $f(x_0) \in X_2$ в топологическом пространстве (X_2, τ_2).

Частичный порядок.

Определение 20. Говорят, что на множестве X выделен частичный порядок или что множество X частично упорядоченно, если выделено некоторое семейство пар $(x, y) \in \mathcal{P} \subset X \otimes X$, для которых пишут $x \leqslant y$, причем для порядка «$\leqslant$» выполнены следующие свойства:

(i) $x \leqslant x$;

(ii) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;

(iii) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Пример.

На плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^1$, которая, конечно, сама по себе не упорядочена, можно ввести частичный порядок следующим образом:

$$x = (x_1, x_2) \leqslant y = (y_1, y_2) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

если выполнены неравенства $x_1 \leqslant y_1$ и $x_2 \leqslant y_2$. Заметим, что при такой частичной упорядоченности имеется место следующее свойство: для всех $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ найдется третья точка $z = (z_1, z_2)$, что имеет место упорядоченность

$$x \leqslant z \quad \text{и} \quad y \leqslant z.$$

Направленности.

Определение 21. Множество A называется направленным, если на нем введена частичная упорядоченность «$\leqslant$», причем таким образом, что для любых $x, y \in \mathrm{A}$ (не обязательно различных) найдется элемент $z \in \mathrm{A}$ (не обязательно отличный от x и y) такой, что

$$x \leqslant z, \quad y \leqslant z.$$

Определение 22. Множество элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, индексируемое направленным множеством A называется направленностью.

Сходимость направленностей.

Определение 23. Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset X$ называется сходящейся к элементу $x_0 \in X$ в топологическом пространстве (X, τ), если для всякой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 найдется такой элемент $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, что для всех элементов $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_0 \leqslant \alpha$, имеем $x_\alpha \in U(x_0)$.

Теорема

Для того чтобы отображение

$$f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

было непрерывным в точке $x \in X_1$, *необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *сходящейся к* x *в топологическом пространстве* (X_1, τ_1), *соответствующая направленность* $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *сходилась к точке* $f(x) \in X_2$ *в топологическом пространстве* (X_2, τ_2).

Доказательство теоремы. Необходимость.

Итак, пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x \in X_1$. Пусть V — это окрестность точки $f(x)$, тогда найдется такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$. Пусть теперь $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — это произвольная направленность, сходящаяся к x. Выберем элемент $\alpha_0 \in \mathrm{A}$ таким образом, чтобы $x_\alpha \in U$ при $\alpha_0 \leqslant \alpha$, но тогда $f(x_\alpha) \in f(U) \subset V$, т. е. направленность $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ сходится к $f(x)$.

Доказательство теоремы. Достаточность.

Докажем теперь утверждение в другую сторону. Действительно, пусть V — это окрестность точки $f(x)$. Выберем направленное множество следующим образом. Пусть $\mathfrak{U}$ — это семейство всех окрестностей точки x, частично упорядоченное следующим образом: для $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ пишем $U_1 \leqslant U_2$, если $U_2 \subset U_1$. Ясно, что $\mathfrak{U}$ с указанным порядком является направленным множеством. Предположим, что для каждого $U \in \mathfrak{U}$ найдется такая точка x_U, что $f(x_U) \notin V$. Таким образом, мы построили направленность $\{x_U\}_{U\in\mathfrak{U}}$, которая сходится к точке x. Докажем это. Действительно, пусть U_0 — это окрестность точки x (т. е. $U_0 \in \mathfrak{U}$), тогда для всякого $U \in \mathfrak{U}$ такого, что $U_0 \leqslant U$ имеем по построению $x_U \in U \subset U_0$. Но при этом по построению направленность $\{f(x_U)\}_{U\in\mathfrak{U}}$ не сходится к точке $f(x)$. Значит, наше предположение неверно, т. е. для всякой окрестности V точки $f(x)$ найдется такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$.

Определение 24. Топологическое пространство (X, τ) называется хаусдорфовым, если для любых двух точек $x \neq y$ найдутся непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(y)$, т. е. $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Теорема

Для того чтобы топологическое пространство (X, τ) было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы всякая сходящаяся направленность имела единственный предел.

Доказательство теоремы. Необходимость-1.

Итак, пусть топологическое пространство (X, τ) является хаусдорфовым. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — это произвольная сходящаяся к точке x и к точке y направленность. Докажем, что $x = y$. Пусть нет, тогда найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Поскольку направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ является сходящейся к x, то для окрестности $U(x)$ найдется такое $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, что при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_1 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U(x).$$

Аналогичным образом найдется такое $\alpha_2 \in \mathrm{A}$, что при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_2 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U(y).$$

Доказательство теоремы. Необходимость-2.

Поскольку множество A является направленным, то для α_1 и α_2 найдется такое α_3, что

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_3.$$

Поэтому

$$x_{\alpha_3} \in U(x) \cap U(y) = \emptyset.$$

Следовательно, $x = y$.

Доказательство теоремы. Достаточность-1.

Пусть топологическое пространство (X, τ) не является хаусдорфовым. Тогда найдутся такие две его точки $x \neq y$, что любые их окрестности $U(x)$ и $U(y)$ соответственно имеют не пустое пересечение:

$$U(x) \cap U(y) \neq \emptyset.$$

Рассмотрим направленное множество $\mathcal{U}$, состоящее из пар $(U(x), U(y))$ окрестностей точек x и y частично упорядоченное следующим образом

$$\alpha_1 = (U_1(x), U_1(y)) \leqslant \alpha_2 = (U_2(x), U_2(y)),$$

если

$$U_2(x) \subset U_1(x) \quad \text{и} \quad U_2(y) \subset U_1(y).$$

Доказательство теоремы. Достаточность-2.

Ясно, что множество $\mathfrak{U}$ является направленным. Поскольку $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$, то можно выделить направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ как $x_U \in U(x) \cap U(y)$. Докажем, что направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к точке x. Действительно, для всякой окрестности $U_0(x)$ найдется $U(x)$ такое, что

$$x_U \in U(x) \subset U_0(x) \quad \text{при} \quad U_0 \leqslant U.$$

Значит, направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к точке x. Аналогичным образом доказывается, что направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к y.

Замкнутость в терминах направленностей.

Теорема

Для того чтобы множество E *топологического пространства* (X, τ) *было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset X$*, сходящейся к* x*, имело место* $x \in E$*.*

Компактность.

Определение 25. Множество $K \subset X$ топологического пространства (X, τ) называется компактным, если из любого покрытия этого множества

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \tau \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \mathrm{A}$$

можно выделить конечное подпокрытие

$$K \subset \bigcup_{\alpha_i} U_{\alpha_i} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n}.$$

Определение 26. Направленность $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$ называется поднаправленностью направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, если существует такое отображение

$$\pi:\mathrm{B}\to\mathrm{A},$$

что $y_\beta = x_{\pi(\beta)}$, причем для каждого $\alpha_0\in\mathrm{A}$ найдется такое $\beta_0\in\mathrm{B}$, что

$$\alpha_0\leqslant\pi(\beta)\quad\text{при всех}\quad\beta_0\leqslant\beta.$$

Определение 27. Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ часто бывает во множестве $E\subset X$, если для всякого $\alpha\in\mathrm{A}$ найдется такой индекс $\alpha'\in\mathrm{A}$, для которого $\alpha\leqslant\alpha'$ и $x_{\alpha'}\in E$.

Предельные точки направленностей.

Определение 28. Точка $x \in X$ в топологическом пространстве (X, τ) называется предельной точкой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, если эта направленность часто бывает в любой окрестности $U(x)$ точки x.

Дадим сначала определение предельной точки множества $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$:
точка x называется предельной точкой множества $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$, если в любой окрестности $U(x)$ точки x есть хотя бы одна точка x_α отличная от x.

Теперь определение предельной точки направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$.
точка x называется предельной точкой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, если эта направленность часто бывает в любой окрестности $U(x)$ этой точки x.

Теорема о предельной точке направленности.

Теорема

Точка $x \in X$ *в топологическом пространстве* (X, τ) *является предельной точкой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *тогда и только тогда, когда существует поднаправленность* $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ *направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *сходящаяся к точке* x.

Доказательство теоремы. Необходимость-1.

Итак, пусть x — есть предельная точка направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Рассмотрим базис окрестностей $\mathfrak{B}_x$ точки x. Значит, для всякой окрестности $U \in \mathfrak{B}_x$ найдется такое $\alpha \in \mathrm{A}$, что $x_\alpha \in U$. Поэтому можно ввести направленное множество B, состоящее из пар (α, U) таких, что при $\alpha \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in U \in \mathfrak{B}_x$. Упорядочим множество B следующим образом:

$$(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha, U), \quad \text{если} \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \quad \text{и} \quad U_1 \supset U.$$

Ясно, что для любых пар

$$(\alpha_1, U_1),\ (\alpha_2, U_2) \in \mathrm{B}$$

найдется пара $(\alpha_3, U_3) \in \mathrm{B}$, для которой

$$(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha_3, U_3), \quad (\alpha_2, U_2) \leqslant (\alpha_3, U_3).$$

Доказательство теоремы. Необходимость-2.

Действительно, свойство, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$ найдется $\alpha_3 \in \mathrm{A}$, что

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_3$$

следует из того, что множество A направленное (см. определение 21). Наконец, то, что для любых $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}_x$ найдется $U_3 \in \mathfrak{B}_x$, что $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ вытекает из определения базиса окрестности $\mathfrak{B}_x$. Итак, множество B пар (α, U) является направленным множеством.

Теперь мы можем определить поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$, где $\beta = (\alpha, U) \in \mathrm{B}$, как $y_{(\alpha,U)} = x_\alpha$. Проверим, что это действительно поднаправленность направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Действительно, это следствие того, что в данном случае отображение π имеет следующий вид (см. определение 26):

$$\pi : (\alpha, U) \to \alpha.$$

Доказательство теоремы. Необходимость-3.

Докажем теперь, что поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ сходится к точке x. Действительно, для любой окрестности $U_1(x) \in \mathfrak{B}_x$ найдется такое $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, что $x_{\alpha_1} \in U_1(x)$. Тогда для всех (α, U) таких, что $(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha, U)$ имеем

$$x_\alpha = y_{(\alpha,U)} \in U \subset U_1.$$

Итак, построенная поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ сходится к x. Доказательство достаточности очевидно.

Теорема доказана.

Теорема о компактности.

Теорема

Топологическое пространство (X, τ) *является компактным тогда и только тогда, когда всякая направленность имеет предельную точку.*