Лекция 8. Банаховы пространства. Дальнейшее развитие теории.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

1 ноября 2012 г.

Открытые отображения.

Пусть $(\mathbb{B}_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{B}_2, \|\cdot\|_2)$ — это банаховы пространства.

Определение 1. Отображение $\mathbb{T}$ называется открытым, если образ всякого открытого множества в $\mathbb{B}_1$ открыт в $\mathbb{B}_2$.

Примером отображения, не являющегося открытым, будет следующее отображение:

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \to \theta,$$

а θ — это замкнутое множество.

Обозначение:

$$\operatorname{Im} \mathbb{T} = \left\{ y \in \mathbb{B}_2 : \ y = \mathbb{T}(x), \ x \in \mathbb{B}_1 \right\}.$$

Теорема об открытом отображении.

Теорема

Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ *и* $\operatorname{Im} \mathbb{T} = \mathbb{B}_2$, *тогда* $\mathbb{T}$ *— это открытое отображение.*

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Символом $b_i(x_0, r)$ будем обозначать открытый шар в банаховом пространстве $\mathbb{B}_i$ при $i = \overline{1, 2}$.

Первая лемма.

Лемма

Пусть выполнены условия теоремы об открытом отображении. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon))}.$$

Доказательство-1.

Поскольку $\operatorname{Im} \mathbb{T} = \mathbb{B}_2$, то

$$\mathbb{B}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n))}.$$

В силу теоремы Бэра о категориях найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{B}_1$ и $r > 0$, что

$$b_2(x_0, r) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}.$$

Заметим, что

$$\overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}$$

— это симметричное относительно нуля и выпуклое множество, что следует из абсолютной выпуклости $b_1(0, n_0)$ и линейности оператора $\mathbb{T}$.

Доказательство-2.

Поэтому имеет место вложение

$$M \equiv \{y: \ y = \alpha z_1 + (1-\alpha)(-z_2), \ z_1, z_2 \in b_2(x_0, r)\} \subset \\ \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}.$$

Но M — открытое множество, содержащее θ. Следовательно, найдется такая окрестность нуля

$$b_2(0, \varepsilon) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}$$

$$\lambda b_2(0, \varepsilon) = b_2(0, \lambda\varepsilon) \subset \lambda\overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))} = \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \lambda n_0))}.$$

Доказательство-3.

Пусть

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{n_0},$$

тогда

$$\delta = \frac{\varepsilon^2}{n_0}$$

и

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon))}.$$

Лемма доказана.

Вторая лемма.

Лемма

Пусть выполнены все условия теоремы об открытом отображении, тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что*

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(b_1(0, 3\varepsilon)),$$

где ε *и* $\delta(\varepsilon)$ *связаны соотношением предыдущей леммы.*

Доказательство-1.

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^{n-1}}, \quad \delta(\varepsilon_n) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_{n-1}).$$

где для каждого ε_n величина $\delta(\varepsilon_n)$ — соответствующая величина в смысле предыдущей леммы.

Итак,

$$b_2(0, \delta(\varepsilon_1)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_1))}.$$

Пусть

$$y \in b_2(0, \delta(\varepsilon_1))$$

— произвольное фиксированное. Докажем, что найдется $x \in b_1(0, 3\varepsilon)$ такое, что

$$y = \mathbb{T}x.$$

Доказательство-2.

Рассмотрим шар

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2).$$

Имеем

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2) \bigcap b_2(0, \delta(\varepsilon_1)) \neq \emptyset.$$

Поскольку

$$b_2(0, \delta(\varepsilon_1)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_1))},$$

то

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2) \bigcap \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_1)) \neq \emptyset.$$

Следовательно, найдется такое $x_1 \in b_1(0, \varepsilon_1)$, что

$$\|y - \mathbb{T}x_1\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_2).$$

Доказательство-3.

Следовательно,

$$z = y - \mathbb{T}(x_1) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_2)).$$

Значит,

$$b_2(z, \delta(\varepsilon_3)/2) \bigcap \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_2)) \neq \emptyset.$$

Следовательно, найдется

$$x_2 \in b_1(0, \varepsilon_2),$$

что

$$y - \mathbb{T}(x_1) - \mathbb{T}(x_2) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_3)/2).$$

Значит,

$$y - \mathbb{T}(x_1) - \mathbb{T}(x_2) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_3))$$

и так далее по индукции.

Доказательство-4.

Итак,

$$\|x_n\|_1 \leqslant \varepsilon_n,$$

$$\|y - \mathbb{T}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_{n+1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \quad y = \mathbb{T}(x), \quad \|x\| < 3\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы об открытом отображении.

Пусть $A \subset \mathbb{B}_1$ — открыто.

$$x_0 \in A, \quad y_0 = \mathbb{T}(x_0).$$

Поскольку A открыто, то найдется такой шар с центром в нуле

$$b_1(0, \varepsilon) \subset \mathbb{B}_1,$$

что

$$x_0 + b_1(0, \varepsilon) = b_1(x_0, \varepsilon) \subset A.$$

По предыдущей лемме найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon)).$$

Но тогда

$$y_0 + b_2(0, \delta(\varepsilon)) = b_2(y_0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(x_0 + b_1(0, \varepsilon)) \subset \mathbb{T}(A).$$

Теорема доказана.

Теорема Банаха об обратном отображении

Необходимое и достаточное условие существования обратного отображения — это

$$\operatorname{Im} \mathbb{T} = \mathbb{B}_2, \quad \operatorname{Ker} \mathbb{T} = \theta.$$

Теорема

Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и выполнены указанные условия, то существует обратное непрерывное отображение.

Доказательство.

Пусть A — открытое множество в $\mathbb{B}_1$, тогда в силу теоремы об открытом отображении

$$\mathbb{T}(A) \quad \text{открыто в} \quad \mathbb{B}_2,$$

то множество

$$(\mathbb{T}^{-1})^{-1}(A) = \mathbb{T}(A) \quad \text{открыто в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, $\mathbb{T}^{-1}$ — это непрерывное отображение.

Теорема доказана.

Замкнутый график.

Определение 2. Графиком линейного отображения

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

называется множество

$$\mathbf{Gr}(\mathbb{T}) = \{x \oplus \mathbb{T}(x) : \ x \in \mathbb{B}_1\} \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2.$$

Если отображение $\mathbb{T}$ непрерывно, то $\mathbf{Gr}(\mathbb{T})$ есть замкнутое подмножество в $\mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$.

Теорема о замкнутом графике.

Теорема

Если график линейного отображения

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

замкнут, то $\mathbb{T}$ *— непрерывное отображение.*

Доказательство.

Если подмножество

$$\mathbf{Gr}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$$

замкнуто, то оно есть банахово подпространство. Отображение

$$\mathbb{P}_1 : x \oplus \mathbb{T}(x) \to x$$

есть линейное непрерывное отображение банахова пространства $\mathbf{Gr}(\mathbb{T})$ на банахово пространство $\mathbb{B}_1$, причем

$$\mathrm{Im}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{B}_1, \quad \mathrm{Ker}(\mathbb{P}_1) = \theta.$$

В силу теоремы Банаха об обратном отображении отображение

$$\mathbb{B}_1 \to \mathbf{Gr}(\mathbb{T}) : x \to x \oplus \mathbb{T}(x)$$

непрерывно. Следовательно, отображение

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 : x \to x \oplus \mathbb{T}(x) \to \mathbb{T}(x)$$

как композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением.

Свойства слабой и $*-$слабой сходимостей.

Теорема

Справедливы следующие два утверждения:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}$ *ограничена, причем*

$$\text{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \text{то} \quad \|u_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|;$$

(ii) *Всякая $*-$слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}^*$ *ограничена, причем*

$$\text{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \text{то} \quad \|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_*.$$

Доказательство-1.

Доказательство (i). В силу уже установленного изометрического вложения $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**}$ мы можем рассмотреть слабо сходящуюся последовательность

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B},$$

как последовательность функционалов из $\mathbb{B}^{**}$:

$$\mathrm{I}_n(f) \equiv \langle u_n, f \rangle_* = \langle f, u_n \rangle \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^* \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N},$$

Поскольку последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится в $\mathbb{B}$, то для каждого фиксированного $f \in \mathbb{B}^*$ числовая последовательность $\mathrm{I}_n(f)$ ограничена, но тогда по теореме о резонансе (первая теорема Банаха—Штейнгауза) имеем, что последовательность $\{\|u_n\|\}$ тоже ограничена.

Доказательство-2.

Теперь заметим, что если отождествить $\mathbb{B}$ с некоторым подпространством в $\mathbb{B}^{**}$, то можно обозначать элемент $u \in \mathbb{B}$ и соответствующий ему элемент $\mathbb{J}u \in \mathbb{B}^{**}$ одной и той же буквой u. С учетом этого замечания имеем

$$\|u_n\| = \|u_n\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle u_n, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u_n\rangle| \,,$$

поэтому получаем следующее неравенство

$$\|u_n\| \geqslant |\langle f, u_n\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Перейдем к нижнему пределу при $n \to +\infty$ в последнем неравенстве и получим неравенство

$$\liminf_{n\to+\infty} \|u_n\| \geqslant |\langle f, u_\infty\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \tag{1}$$

поскольку

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u_\infty\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Доказательство-3.

Поскольку левая часть неравенства (1) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, то возьмем supremum от обеих частей по $f \in \mathbb{B}^* : \ \|f\|_* = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \to +\infty} \|u_n\| \geqslant \|u_\infty\|,$$

поскольку

$$\|u_\infty\| = \|u_\infty\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle u_\infty, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u_\infty\rangle| \, .$$

Доказательство-4.

Доказательство (ii). Введем обозначение

$$\mathrm{K}_n(u) \equiv \langle f_n, u \rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку числовая последовательность $\{\mathrm{K}_n(u)\}$ сходится для каждого $u \in \mathbb{B}$, то из теоремы о резонансе вытекает ограниченность числовой последовательности $\{\|f_n\|_*\}$. По определению нормы $\| \quad \|_*$ имеем

$$\|f_n\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_n, u \rangle| \geqslant |\langle f_n, u \rangle| \, .$$

Теперь перейдем к нижнему пределу при $n \to +\infty$, тогда поскольку

$$\langle f_n, u \rangle \to \langle f_\infty, u \rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B},$$

то получим неравенство

$$\liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_* \geqslant |\langle f_\infty, u \rangle| \, . \tag{2}$$

Доказательство-5.

Поскольку левая часть неравенства (2) не зависит от $u \in \mathbb{B}$, то перейдем в обеих частях к supremum по $u \in \mathbb{B} : \ \|u\| = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_* \geqslant \|f_\infty\|_*,$$

поскольку

$$\|f_\infty\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_\infty, u\rangle| \,.$$

Теорема доказана.

Достаточное условие слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\{u_n\}$ *— ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства* $\mathbb{B}$*. Тогда из* $\{u_n\}$ *можно выделить слабо сходящуюся в* $\mathbb{B}$ *подпоследовательность* $\{u_{n_n}\}$ *:*

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство-1.

Для простоты докажем эту теорему для случая *сепарабельного* банахова пространства $\mathbb{B}$.

Поскольку пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, значит мы можем отождествить пространство $\mathbb{B}$ с дважды сопряженным $\mathbb{B}^{**}$. Стало быть, имеем $\mathbb{B}^{**} = \mathbb{B}$, а так как $\mathbb{B}$ сепарабельно, то сепарабельно и пространство $\mathbb{B}^{**}$, но это пространство является сопряженным к банахову пространству $\mathbb{B}^{*}$. Значит, в силу следствия 4 из теоремы Хана—Банаха пространство $\mathbb{B}^{*}$ является сепарабельным.

Доказательство-2.

Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — это счетное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$ множество. Поскольку последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ ограничена по норме, то числовая последовательность

$$\langle f_1, u_n \rangle$$

ограниченная, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_1, u_{n_1} \rangle .$$

Числовая последовательность

$$\langle f_2, u_{n_1} \rangle$$

тоже ограниченная, а значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_2, u_{n_2} \rangle .$$

Доказательство-3.

Продолжая таким образом этот процесс мы получим подпоследовательность $\{u_{n_{k+1}}\}$, которая слабо сходится на элементах f_j при $j = 1, ..., k+1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$ исходной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится на счетном всюду плотном в $\mathbb{B}^*$ множестве $\{f_n\}$.
Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u_\infty \in \mathbb{B}$.

Доказательство-4.

Пусть $f \in \mathbb{B}^*$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}
|\langle f, u_{n_n}\rangle - \langle f, u_{m_m}\rangle| \leqslant |\langle f, u_{n_n}\rangle - \langle f_k, u_{n_n}\rangle| + \\
+ |\langle f_k, u_{n_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_m}\rangle| + |\langle f, u_{m_m}\rangle - \langle f_k, u_{m_m}\rangle| \leqslant \\
\leqslant \|f - f_k\|_* \|u_{n_n}\| + |\langle f_k, u_{n_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_m}\rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_m}\|.
\end{gathered}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{f_k\}$ в пространстве $\mathbb{B}^*$ относительно сильной сходимости и ограниченности подпоследовательности $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\} \subset \mathbb{B}$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \to +\infty$.

Доказательство-5.

Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f, u_{n_n}\rangle\}$$

является фундаментальной при любом $f \in \mathbb{B}^*$. Значит, сходится. Стало быть, найдется некоторый элемент $u \in \mathbb{B}$, что

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Достаточное условие $*-$слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}$ *— сепарабельное банахово пространство и* $\{f_n\}$ *— ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства* $\mathbb{B}^*$*. Тогда из* $\{f_n\}$ *можно выделить* $*-$*слабо сходящуюся в* $\mathbb{B}^*$ *подпоследовательность* $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \xrightharpoonup{*} f \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Определение 3. *Пусть* $\mathbb{B}$ *— это банахово пространство. Пространство* $\mathbb{B}$ *называется равномерно выпуклым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из неравенств* $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ *и* $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ *следует*

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{3}$$

Приведем без доказательства следующий важный результат В. Д. Мильмана.

Теорема

Всякое равномерно выпуклое банахово пространство $\mathbb{B}$ *рефлексивно.*

Достаточное условие сильной сходимости.

Теорема

Если $\mathbb{B}$ — это равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

и

$$\|u_n\| \to \|u\|,$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство-1.

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\| = 1$ и $\|u_n\| \neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\| = 1$ и $v_n \rightharpoonup u$ при $n \to +\infty$. Теперь возьмем $\varepsilon_n = \|v_n - u\|$, тогда по определению 3 найдется такая неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$ и $\delta(0) = 0$, что

$$\|v_n + u\| \leqslant 2\left(1 - \delta\left(\|v_n - u\|\right)\right). \tag{4}$$

Поскольку в силу теоремы Мильмана банахово пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \|v_n + u\| = \|v_n + u\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle v_n + u, f\rangle_*| = \\ = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, v_n + u\rangle| \geqslant |\langle f, v_n + u\rangle| \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство-2.

Переходя к нижнему пределу в неравенстве (4) с учетом неравенства (5), получим следующее неравенство:

$$2\liminf_{n\to+\infty}\left(1-\delta\left(\|v_n-u\|\right)\right)\geqslant\liminf_{n\to+\infty}\left|\langle f, v_n+u\rangle\right| = 2\left|\langle f, u\rangle\right|, \tag{6}$$

поскольку $v_n \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{B}$. Левая часть неравенства (6) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, поэтому можно перейти к supremum по всем $f \in \mathbb{B}^* : \ \|f\|_* = 1$ и получить неравенство

$$2\liminf_{n\to+\infty}\left(1-\delta\left(\|v_n-u\|\right)\right)\geqslant 2\|u\|_{**} = 2\|u\| = 2.$$

Доказательство-3.

Которое возможно только в том случае, когда

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - u\| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\| v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \to \|u\| = 1.$

Теорема доказана.