Лекция 1. Мера Лебега плоских множеств

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

5 сентября 2012 г.

Введение

Функция Дирихле не интегрируема по Риману:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0 & \text{при} \quad x \in \mathbb{J} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Нужно расширить понятие интеграла Римана так, чтобы, в частности, функция Дирихле оказалась интегрируемой.

Элементы теории множеств

$$A \cup B = \{x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\},$$

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

ПРИМЕР 1. Пусть $A \subset P$ и $B \subset P$, тогда имеют место следующие равенства:

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]\,, \tag{1}$$

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B)\,, \tag{2}$$

$$A \triangle B = (P \setminus A) \triangle (P \setminus B)\,. \tag{3}$$

ПРИМЕР 2. Кроме того, справедливы следующие вложения:

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)\,; \tag{4}$$

если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)\,. \tag{5}$$

Мера прямоугольников

$$\Pi = \{A_x \times B_y\}\,,$$
$$A_x = \{x \in \lfloor a, b \rceil\}\,, \quad B_y = \{y \in \lfloor c, d \rceil\}\,.$$

(Символ $\lfloor a, b \rceil$ обозначает конечный промежуток любого типа.) Причем Π может быть пустым множеством, если, например, $a > b$, точкой, когда $a = b$ и $c = d$, и отрезком (интервалом, полуинтервалом), когда $a = b$ и $c < d$.
Определим меру собственного прямоугольника Π стандартным образом, как площадь:

$$m(\Pi) = (b - a)(d - c).$$

Если же Π — это пустое множество, точка или отрезок (интервал, полуинтервал), то определению считаем, что

$$m(\Pi) = 0.$$

Мера плоских элементарных множеств

Можно доказать, что введенная мера m является аддитивной функцией прямоугольников, т. е. если

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i \text{— прямоугольник},$$

то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i). \tag{6}$$

Теперь мы введем понятие *элементарного множества* из $\mathbb{R}^2$.

Определение 1. *Элементарным множеством из $\mathbb{R}^2$ называется множество, полученное объединением* ***конечного*** *числа* ***попарно непересекающихся*** *прямоугольников.*

При этом мера элементарного множества вводится как

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i), \quad \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{7}$$

Корректность определения

☐ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j, \qquad (8)$$

где

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В силу равенств (8) имеем

$$\Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} \left(Q_j \bigcap \Pi_i \right), \quad Q_j = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\Pi_i \bigcap Q_j \right), \qquad (9)$$

причем

$$\begin{aligned} \left(Q_{j_1} \bigcap \Pi_i \right) \bigcap \left(Q_{j_2} \bigcap \Pi_i \right) &= \emptyset \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2, \\ \left(\Pi_{i_1} \bigcap Q_j \right) \bigcap \left(\Pi_{i_2} \bigcap Q_j \right) &= \emptyset \quad \text{при} \quad i_1 \neq i_2. \end{aligned} \qquad (10)$$

Корректность определения

Очевидно, что множество

$$Q_j \bigcap \Pi_i = \Pi_i \bigcap Q_j$$

является прямоугольником. Таким образом, согласно определению (7) в силу (8), (9), (10) и (6) приходим к следующей цепочке равенств:

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\bigcup_{j=1}^{l}\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} m\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} m\left(\Pi_i \bigcap Q_j\right) = \sum_{j=1}^{l} m(Q_j). \tag{11}$$

$\boxtimes$

Конечная аддитивность и монотонность

Непосредственно из определения следуют важные свойства меры на элементарных множествах. Именно, если A, B — элементарные множества, то

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow m'(A \cup B) = m'(A) + m'(B), \tag{12}$$

(конечная аддитивность)

$$A \subset B \Rightarrow m'(A) \leqslant m'(B) \tag{13}$$

(монотонность).

Имеет место свойство *счётной полуаддитивности* элементарных множеств.

Теорема

Пусть A *и* A_n *при* $n \in \mathbb{N}$ *являются элементарными множествами, причем*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$m'(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n). \tag{14}$$

Доказательство теоремы. 1

Прежде всего заметим, что по элементарному множеству A можно построить такое замкнутое элементарное множество $\overline{A}$, что

$$\overline{A} \subset A$$

и

$$m'(\overline{A}) \geqslant m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (15)$$

$\square$ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{j=1}^{l} \Pi_j, \quad \text{где} \quad \Pi_i \bigcap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Пусть $\overline{\Pi}_j$ — это замкнутый прямоугольник (т. е. имеющий вид $[a, b] \otimes [c, d]$), для которого имеет место вложение

$$\overline{\Pi}_j \subset \Pi_j$$

Доказательство теоремы. 2

и мера которого равна

$$m(\overline{\Pi}_j) \geqslant m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2l},$$

тогда мы приходим к неравенству (15).
$\boxtimes$

Доказательство теоремы. 3

Теперь заметим, что для всякого элементарного множества A_n найдется такое открытое элементарное множество $\widetilde{A}_n$, что

$$A_n \subset \widetilde{A}_n \quad \text{и} \quad m'(\widetilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{16}$$

Ясно, что

$$\overline{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n. \tag{17}$$

Но $\overline{A}$ — это замкнутое и ограниченное множество из $\mathbb{R}^2$, т. е. компакт. Поэтому из открытого покрытия $\{\widetilde{A}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ множества $\overline{A}$ можно выделить конечное подпокрытие

$$\left\{\widetilde{A}_{n_i}\right\}_{i=1}^{s}, \quad \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{A}_{n_i} \supset \overline{A}.$$

Доказательство теоремы. 4

Используя свойство монотонности меры элементарных множеств, можно доказать, что имеет место неравенство

$$m'(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}). \tag{18}$$

Теперь из неравенств (15), (16) и (18) вытекает цепочка

$$m'(A) \leqslant m'(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(\widetilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \varepsilon. \tag{19}$$

Приходим к утверждению теоремы. ☒

Следствие из теоремы

Следствие. *Мера m', заданная на элементарных множествах, является $\sigma-$аддитивной:*

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n), \qquad (20)$$

если A, A_n (n=1,2,...) — элементарные множества и

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \emptyset \quad \textit{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

□ Очевидно, нужно доказать лишь неравенство, обратное (14). Используем монотонность внешней меры элементарных множеств

$$\sum_{n=1}^{N} m'(A_n) = m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant m'(A)$$

и предельный переход в неравенстве. ⊠

Мера Лебега плоских областей. Внешняя мера

Определение 2. *Внешней мерой* μ^* *множества* A *называется число*

$$\mu^*(A) \equiv \inf_{A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_k} \sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_k), \tag{21}$$

где $\{\Pi_k\}$ *— произвольная счетная система прямоугольников.*

Замечание. Пока мы рассматриваем лишь $A \subset \Pi \equiv [0,1] \times [0,1]$, имеем $m(\Pi) = 1$ и из равенства (21) приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \leqslant m(\Pi) = 1,$$

т. е. внешняя мера множества $A \subset \Pi$ всегда конечна.

Следствие. *Из определения внешней меры сразу же ытекает, что*

$$\mu^*(A) = m'(A)$$

для всякого элементарного множества A.

σ-полуаддитивность внешней меры

Теорема

Пусть $A \subset \Pi$, $B \subset \Pi$ — *произвольные множества и*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n). \tag{22}$$

Заметим, что в силу определения внешней меры μ^* для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая система прямоугольников

$$\{\Pi_{k,n}\}_{k=1}^{+\infty},$$

что

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_{k,n}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{23}$$

Доказательство теоремы. 2

С другой стороны,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и, стало быть,

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(\Pi_{k,n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы. ☒

Определение 3. *Множество A называется измеримым по Лебегу, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{24}$$

Замечание. Отметим, что из определения 3 сразу же вытекает измеримость по Лебегу множеств A, имеющих нулевую внешнюю меру.

□ Действительно, пусть $\mu^*(A) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $B = \emptyset$ и

$$\mu^*(A \triangle B) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

⊠

Свойства меры Лебега

Множество измеримых по Лебегу множеств $\mathfrak{M}$ обладает определенным набором свойств, некоторые из которых мы собрали в следующей лемме, доказательство которой мы опустим.

Лемма

Сумма, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми по Лебегу множествами.

(Докажите лемму самостоятельно, пользуясь определениями внешней меры и фактами со слайда «Элементы теории множеств».)

Свойства меры Лебега

Теперь мы в состоянии доказать $\sigma-$аддитивность меры Лебега μ на множестве $\mathfrak{M}$. Сначала докажем её **конечную** аддитивность.

Теорема

Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n,$$

где $A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \emptyset$ *при* $n_1 \neq n_2$, *причем* $A, A_n \in \mathfrak{M}$, *тогда*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Доказательство теоремы. 1

Лемма

Для любых множеств A и B имеет место следующее неравенство:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \vartriangle B). \tag{25}$$

$\square$ Действительно, имеют место вложения

$$A \subset B \cup (A \vartriangle B)\,, \quad B \subset A \cup (A \vartriangle B)\,,$$

из которых в силу доказанной полуаддитивности внешней меры μ^* имеют место следующие неравенства:

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \vartriangle B).$$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \vartriangle B).$$

$\boxtimes$

Доказательство теоремы. 2

Очевидно, что рассматриваемую теорему достаточно доказать для случая двух измеримых по Лебегу множеств A_1 и A_2. Поскольку $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества B_1 и B_2, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{26}$$

Введем следующие обозначения:

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2. \tag{27}$$

Ясно, что как объединение двух измеримых множеств множество A измеримо по Лебегу и, конечно, множество B является элементарным.

Доказательство теоремы. 3

Ранее было доказано вложение

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2), \tag{28}$$

поскольку множества A_1 и A_2 не пересекаются. Заметим, что на элементарных множествах внешняя мера μ^* и мера m' совпадают. Тогда из (26) и (28) вытекает следующее соотношение:

$$m'(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < 2\varepsilon. \tag{29}$$

Наконец, в силу (25) имеют место следующие неравенства:

$$\left| m'(B_1) - \mu^*(A_1) \right| = |\mu^*(B_1) - \mu^*(A_1)| \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \varepsilon, \tag{30}$$

$$\left| m'(B_2) - \mu^*(A_2) \right| = |\mu^*(B_2) - \mu^*(A_2)| \leqslant \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \varepsilon. \tag{31}$$

Доказательство теоремы. 4

С другой стороны, имеет место равенство

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2), \qquad (32)$$

которое будет доказано на следующем слайде.

Доказательство теоремы. 5

☐ Докажем, что

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cap A_2).$$

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c), \quad A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2),$$

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c),$$

где объединяемые множества не пересекаются и для удобства мы ввели обозначение

$$A^c = E \backslash A.$$

Отсюда приходим к равенствам

$$\lambda(A_1) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c), \quad \lambda(A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2),$$

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c).$$

⊠

Доказательство теоремы. 6

Из (29)–(32) вытекает оценка снизу

$$m^{'}(B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon. \tag{33}$$

Теперь мы воспользуемся следующим вложением множеств:

$$A \vartriangle B \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2).$$

Из (25) и (33) вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(A \vartriangle B) = m^{'}(B) - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon. \tag{34}$$

Доказательство теоремы. 7

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{35}$$

Обратное неравенство очевидно (полуаддитивность внешней меры), и поэтому приходим к равенству

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Некоторые результаты

Теорема

Счетное объединение и счетное пересечение измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми множествами.

Доказательство теоремы. 1

Докажем измеримость счетного объединения измеримых множеств. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — это семейство измеримых множеств и пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Заметим, что без ограничения общности можно считать множества A_n попарно непересекающимися.

$\square$ Действительно, достаточно рассмотреть следующие множества:

$$A_n^{'} = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Очевидно, что $A_{n_1}^{'} \cap A_{n_2}^{'} = \emptyset$ при $n_1 \neq n_2$ и, кроме того,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^{'}. \quad \boxtimes.$$

Доказательство теоремы. 2

В силу предыдущей теоремы имеет место цепочка выражений:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n'\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n') \leqslant \mu(A). \tag{36}$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n')$$

сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(A_n') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{37}$$

С другой стороны, измеримо множество

$$C = \bigcup_{n=1}^{N} A_n'.$$

Доказательство теоремы. 3

Стало быть, для $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что

$$\mu^*(C \vartriangle B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38}$$

Заметим, что имеет место вложение

$$A \vartriangle B \subset (C \vartriangle B) \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A_n'. \tag{39}$$

Стало быть, из (36)–(39) приходим к неравенству

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Некоторые результаты

Теорема

Пусть $\{A_n\}$ — это счетная система измеримых по Лебегу и попарно непересекающихся множеств, тогда

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n), \quad \text{где } A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \tag{40}$$

Доказательство теоремы

Действительно,

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A,$$

и, значит,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \mu(A) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Переходя к пределу при $N \to +\infty$, мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Обратное неравенство непосредственно следует из σ-полуаддитивности внешней меры.