Лекция 11. Гильбертовы пространства. Общая теория.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

22 января 2012 г.

Определение гильбертова пространства.

Определение. *Гильбертовым пространством называется линейное пространство* $\mathbb{H}$, *в котором введено скалярное произведение, т. е. числовая функция* (x, y), *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$;
2) $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$;
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
4) $(x, x) > 0$ *при* $x \neq 0$; $(x, x) = 0$ *при* $x = 0$,

и которое является полным пространством относительно расстояния $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$.

Неравенство Коши–Буняковского.

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)\,(y,y)\,.$$

□ Для доказательства этого утверждения рассмотрим выражение

$$(x+\alpha y, x+\alpha y) = (x,x) + \overline{\alpha}\,(x,y) + \alpha\,(y,x) + |\alpha|^2\,(y,y)\,,$$

По аксиоме 4 это выражение неотрицательно, каково бы ни было число α. Предполагая, что $(y,y) > 0$, положим

$$\alpha = -\frac{(x,y)}{(y,y)}.$$

На основе сказанного

$$(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geqslant 0,$$

т. е.

$$(x,x)\,(y,y) - |(x,y)|^2 \geqslant 0.\boxtimes$$

Норма гильбертова пространства.

Проверим, что выражение

$$\|a\| \stackrel{def}{=} (a, a)^{1/2}$$

действительно норма в гильбертовом пространстве. Осталось проверить лишь то, что имеет место неравенство

$$\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|.$$

Действительно,

$$\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + (a,b) + (b,a) \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2|(a,b)| \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\| =$$
$$= (\|a\| + \|b\|)^2$$

Ортогональные элементы.

При изучении гильбертовых пространств важным является оказывается понятие ортогональности элементов.

Определение. *Элементы x и y гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом пишут $x \perp y$.*

Определение. *Если x ортогонален к каждому элементу множества $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$, то пишут, что $x \perp \mathcal{A}$.*

Определение. *Если элементы двух множеств $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{H}$ и $\mathcal{A}_2 \subset \mathbb{H}$ попарно ортогональны, то пишут, что $\mathcal{A}_1 \perp \mathcal{A}_2$.*

Определение. *Совокупность всех элементов, ортогональных данному множеству $\mathcal{E} \subset \mathbb{H}$, называется ортогональным дополнением множества $\mathcal{E}$ и обозначается $\mathcal{E}^{\perp}$.*

Утверждение. Каким бы ни было множество $\mathcal{E} \subset \mathbb{H}$, его ортогональное дополнение является подпространством пространства $\mathbb{H}$, т.е. линейным замкнутым множеством.

Равенство параллелограмма.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \qquad (1)$$

$\square$ Имеет место цепочка равенств

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2+(x,y)+(y,x)-(x,y)-(y,x)$$

$\boxtimes$

Теорема Беппо-Леви.

Теорема Беппо–Леви. Пусть $\mathbb{H}_1$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_2$ — его ортогональное дополнение. Каков бы ни был элемент $x \in \mathbb{H}$, его можно единственным образом представить в форме

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \mathbb{H}_1, \quad x_2 \in \mathbb{H}_2.$$

При этом элемент x_1 реализует расстояние от x до $\mathbb{H}_1$, т. е.

$$\|x - x_1\| = d(x, \mathbb{H}_1).$$

Доказательство теоремы Беппо-Леви-1.

Обозначим

$$d = d(x, \mathbb{H}_1) = \inf_{y \in \mathbb{H}_1} \|x - y\|$$

и найдем элементы $x_n \in \mathbb{H}_1$ так, что

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \tag{2}$$

положив в нем

$$x \to x - x_n, \quad y \to x - x_m$$

Доказательство теоремы Беппо-Леви-2.

имеем

$$\|x_n - x_m\|^2 + \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 2\left[\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2\right]. \tag{3}$$

А так как

$$\frac{x_m + x_n}{2} \in \mathbb{H},$$

то

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geqslant 4d^2.$$

Следовательно, из (3) с помощью (2) и этой оценки получаем

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2}\right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким образом,

$$x_n \to x^* \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}$$

Доказательство теоремы Беппо-Леви-3.

В силу полноты пространства $\mathbb{H}$ существует

$$x^* = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

При этом $x^* \in \mathbb{H}_1$ (по замкнутости).
Переходя к пределу в выражении

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N},$$

найдем

$$\|x - x^*\| \leqslant d,$$

а так как для любого элемента из $\mathbb{H}_1$, в том числе и для x^*, должно быть $\|x - x^*\| \geqslant d$, то

$$\|x - x^*\| = d. \qquad (4)$$

Доказательство теоремы Беппо-Леви-4.

Докажем теперь, что элемент $x^{**} = x - x^*$ ортогонален $\mathbb{H}_1$ и поэтому принадлежит $\mathbb{H}_2$. Возьмем отличный от нулевого элемент $y \in \mathbb{H}_1$. При любом λ имеем

$$x^* + \lambda y \in \mathbb{H}_1,$$

так что

$$\|x^{**} - \lambda y\|^2 = \|x - (x^* + \lambda y)\|^2 \geqslant d^2,$$

что можно переписать, используя

$$\|x - x^*\| = d,$$

в форме

$$-\lambda(x^{**}, y) - \overline{\lambda}(y, x^{**}) + |\lambda|^2 (y, y)^2 + (x^{**}, x^{**}) \geqslant d^2,$$

поскольку $\|x^{**}\| = \|x - x^*\| = d$.

Доказательство теоремы Беппо-Леви-5.

Следовательно,

$$-\lambda(x^{**},y)-\overline{\lambda}(y,x^{**})+|\lambda|^2(y,y)^2\geqslant 0,$$

где положим

$$\lambda=\frac{\overline{(x^{**},y)}}{(y,y)}$$

и получим неравенство

$$-\frac{|(x^{**},y)|^2}{(y,y)}-\frac{|(x^{**},y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x^{**},y)|^2}{(y,y)}\geqslant 0,$$

т. е.

$$|(x^{**},y)|^2\leqslant 0,$$

что может быть лишь в случае $(x^{**},y)=0$, $x^{**}\perp y$.
Итак, возможность представления x в форме $x=x_1+x_2$ и соотношение $\|x-x_1\|=d(x,\mathbb{H}_1)$ установлены.

Доказательство теоремы Беппо-Леви-6.

Докажем теперь единственность представления. В самом деле, если

$$x = x_1^* + x_2^*, \quad x_1^* \in \mathbb{H}_1 \quad x_2^* \in \mathbb{H}_2,$$

то, сопоставляя это с представлением $x = x_1 + x_2$, получим

$$x_1 - x_1^* = x_2^* - x_2.$$

Элемент, стоящий в левой части этого равенства, принадлежит $\mathbb{H}_1$, а в правой части — $\mathbb{H}_2$, поэтому

$$x_1 - x_1^* \perp x_2^* - x_2,$$

откуда получаем

$$x_1 - x_1^* = x_2^* - x_2 = 0.$$

Теорема доказана.

Разложение по базису.

Определение. *Система гильбертова пространства* $\mathbb{H}$ *называется полной в* $\mathbb{H}$, *если единственным элементом, ортогональным данной системе, является нулевой элемент.*

Определение. *Гильбертово пространство* $\mathbb{H}$ *называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т. е. такое множество, замыкание которого по метрике* $\mathbb{H}$ *совпадает со всем пространством* $\mathbb{H}$.

Теорема

В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ *всякая полная ортонормированная система* $\{\varphi_n\}$ *является базисом, т. е. для любого* $f \in \mathbb{H}$ *имеет место разложение*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \varphi_n, \ \text{причём } \|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 .$$

Доказательство теоремы-1.

Докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$$

сходится. Составим вектор

$$g = \sum_{n=1}^{p} (f, \varphi_n)\, \varphi_n,$$

пусть $f = g + h$, где h подлежит определению. Вектор h ортогонален любому из векторов $\varphi_1, ..., \varphi_p$ и, следовательно, и их линейной оболочке. Действительно,

$$(h, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - (g, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - \left(\sum_{n=1}^{p} (f, \varphi_n)\varphi_n, \varphi_i \right) =$$

$$= (f, \varphi_i) - (f, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, ..., p.$$

Доказательство теоремы-2.

По теореме Пифагора

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2 = \sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2 + \|h\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2 .$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2 \leqslant \|f\|^2$$

при любом p. Переходя к пределу при $p \to +\infty$, получим так называемое неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Доказательство теоремы-3.

Положим теперь $(f, \varphi_n) = \xi_n$. Пусть $s_p = \sum\limits_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n$. Тогда

$$\|s_p - s_q\|^2 = \sum_{n=p+1}^{q} |\xi_n|^2, \quad q > p.$$

При $p \to +\infty$ эта величина стремится к нулю вследствие сходимости ряда из чисел $|\xi_n|^2$. Поэтому последовательность $\{s_p\}$ фундаментальна и в силу полноты $\mathcal{H}$ сходится:

$$\lim_{p \to +\infty} s_p = s \in \mathcal{H}.$$

Доказательство теоремы-4.

Покажем, что $s = f$. Для этого заметим, что при фиксированном k и для всех $p > k$ справедливо соотношение

$$(s, \varphi_k) = \lim_{p \to +\infty} (s_p, \varphi_k) = \lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n, \varphi_k \right) = \xi_k = (f, \varphi_k).$$

Поэтому для любого k имеем, что $(f - s, \varphi_k) = 0$; так как система $\{\varphi_n\}$ полна, то $f = s$, т. е.

$$f = \lim_{p \to +\infty} s_p = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n.$$

Доказательство теоремы-5.

В силу непрерывности скалярного произведения получаем

$$\|f\|^2 = \left(\lim_{p\to+\infty} s_p, \lim_{p\to+\infty} s_p\right) = \lim_{p\to+\infty}(s_p, s_p) =$$

$$= \lim_{p\to+\infty}\sum_{n=1}^{p}|\xi_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2.$$

Теорема доказана.

Лемма Рисса–Фреше.

Пусть $\mathbb{H}$ гильбертово пространство с сопряженным $\mathbb{H}^*$. Справедлива следующая важная теорема.

Теорема

Для всякого $t \in \mathbb{H}^*$ существует единственный элемент $y_t \in \mathbb{H}$, такой, что

$$\langle t, x \rangle = (y_t, x)$$

для всех $x \in \mathbb{H}$. Кроме того, $\|y_t\|_{\mathbb{H}} = \|t\|_{\mathbb{H}^*}$, где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^*$.

Замечание. Обратно, всякий элемент $y \in \mathbb{H}$ задаёт непрерывный линейный функционал t_y по формуле $\langle t_y, x \rangle = (y, x)$.

Доказательство-1.

Пусть

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{H} : \ \langle t, x \rangle = 0\}$$

В силу непрерывности t множество $\mathcal{N}$ есть замкнутое подпространство.

Если $\mathcal{N} = \mathcal{H}$, то

$$\langle t, x \rangle = 0 = (\theta, x)$$

для всех x и доказательство закончено.

Доказательство-2.

Поэтому допустим, что

$$\mathcal{N} \neq \mathbb{H}.$$

Тогда, в силу теоремы Беппо–Леви существует $x_0 \neq \theta$:

$$x_0 \in \mathcal{N}^{\perp}.$$

Положим

$$y_t = \overline{\langle t, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Покажем, что y_t обладает нужными свойствами.

Доказательство-3.

Во-первых, если $x \in \mathcal{N}$, то $\langle t, x\rangle = 0 = (y_t, x)$. Далее, если $x = \alpha x_0$, то

$$\langle t, x\rangle = \langle t, \alpha x_0\rangle = \alpha\langle t, x_0\rangle = \left(\overline{\langle t, x_0\rangle}\|x_0\|^{-2}x_0, \alpha x_0\right) = (y_t, \alpha x_0).$$

Каждый элемент $x \in \mathbb{H}$ может быть записан в виде

$$x = \left(x - \frac{\langle t, x\rangle}{\langle t, x_0\rangle}x_0\right) + \frac{\langle t, x\rangle}{\langle t, x_0\rangle}x_0.$$

Значит,

$$\langle t, x\rangle = (y_t, x), \quad y_t = \overline{\langle t, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

для всех $x \in \mathbb{H}$.

Доказательство-4.

Для доказательства равенства $\|y_t\|_{\mathbb{H}} = \|t\|_{\mathbb{H}^*}$ заметим, что

$$\|t\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle t, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(y_t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|y_t\|\|x\| = \|y_t\|$$

и

$$\|t\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle t, x\rangle| \geqslant \left|\left\langle t, \frac{y_t}{\|y_t\|}\right\rangle\right| = \left(y_t, \frac{y_t}{\|y_t\|}\right) = \|y_t\|.$$

Теорема доказана.

Отображение в лемме Рисса–Фреше.

Рассмотрим отображение Рисса–Фреше

$$RF : t \in \mathbb{H}^* \to y_t \in \mathbb{H},$$

определенное явной формулой

$$y_t = \overline{\langle t, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Из его вида ясно, что оно обладает свойством антилинейности

$$y_{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2} = \overline{\langle \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2} =$$

$$= \overline{\lambda_1} \overline{\langle t_1, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2} + \overline{\lambda_2} \overline{\langle t_2, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2} = \overline{\lambda_1} y_{t_1} + \overline{\lambda_2} y_{t_2}.$$

Полуторалинейные формы.

Определение. Полуторалинейной формой $B(x, y)$ называется функция двух переменных

$$B(x, y) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}^1$$

линейная по первому аргументу и антилинейная по второму аргументу:

$$B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2),$$

$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1} B(x_1, y) + \overline{\lambda_2} B(x_2, y).$$

Лемма о представлении полуторалинейной формы.

Лемма

Пусть полуторалинейная форма $B(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$|B(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

(Такая полуторалинейная форма называется ограниченной.) Тогда существует такой оператор $\mathbb{A} \in \mathfrak{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, что имеет место представление

$$B(x, y) = (\mathbb{A}x, y).$$

Доказательство.

В силу условия в лемме для всякого фиксированного $x \in \mathbb{H}$ отображение

$$y \to B(x, y)$$

является линейным и непрерывным функционалом. Значит в силу леммы Рисса–Фреше найдется такой вектор $\mathbb{A}(x)$, что

$$(\mathbb{A}(x), y) = B(x, y),$$

причем отображение

$$\mathbb{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

является линейным в силу антилинейности формы $B(x, y)$ по x и антилинейности скалярного произведения (x, y) по x.

Теперь имеет место следующая цепочка выражений:

$$\|\mathbb{A}(x)\| = \sup_{\|y\|=1} |(\mathbb{A}(x), y)| = \sup_{\|y\|=1} |B(x, y)| \leqslant c_1 \sup_{\|y\|=1} \|x\|\|y\| \leqslant c_1\|x\|.$$

Лемма об обратимости оператора в представлении формы.

Лемма

Пусть полуторалинейная форма $B(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$|B(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \quad \textit{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

Пусть, кроме того, имеет место свойство коэрцитивности полуторалинейной формы

$$B(x, x) \geqslant m\|x\|^2$$

Тогда оператор $\mathbb{A} \in \mathfrak{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ из предыдущей леммы обладает обратным $\mathbb{A}^{-1}$, причем

$$\|\mathbb{A}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}.$$

Транспонированный и сопряженный операторы.

Пусть $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ — два гильбертовых пространства с сопряженными $\mathbb{H}_1^*$ и $\mathbb{H}_2^*$, со скобками двойственности

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_1$$

и со скалярными произведениями

$$(\cdot,\cdot)_1, \quad (\cdot,\cdot)_2.$$

Пусть задан оператор $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$. Напомним определение транспонированного оператора $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2^*, \mathbb{H}_1^*)$:

$$\langle \mathbb{T}^t f, u\rangle_1 = \langle f, \mathbb{T}u\rangle_2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}_1, \quad f \in \mathbb{H}_2^*.$$

Теперь введем сопряженный оператор $\mathbb{T}^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_1)$:

$$(\mathbb{T}^* f, u)_1 = (f, \mathbb{T}u)_2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}_1, \quad f \in \mathbb{H}_2.$$

Пространство $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega)$ имеет вид

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} \overline{f(x)} g(x)\, dx,$$

а скобки двойственности имеют вид

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x) g(x)\, dx.$$

Поэтому оператор Рисса–Фреше имеет вид

$$RF(f) = \overline{f}.$$

Ясно, что это антилинейное отображение.

Связь транспонированного и сопряженного операторов.

Если ввести в соответствии с леммой Рисса–Фреше соответствующие операторы Рисса–Фреше:

$$RF_1 : \mathbb{H}_1^* \to \mathbb{H}_1, \quad RF_2 : \mathbb{H}_2^* \to \mathbb{H}_2,$$

то связь между транспонированным оператором $\mathbb{T}^t$ и сопряженным оператором $\mathbb{T}^*$ будет следующая:

$$\mathbb{T}^* = RF_1 \mathbb{T}^t RF_2^{-1}.$$

Поскольку по доказанному операторы Рисса–Фреше являются изометрическими изоморфизмами, то согласно доказанному ранее равенству норм

$$\|\mathbb{T}^t\| = \|\mathbb{T}\|$$

получим, что

$$\|\mathbb{T}^*\| = \|\mathbb{T}\|,$$

где символом $\|\cdot\|$ мы обозначаем РАЗЛИЧНЫЕ операторные нормы!!!

Доказательство равенства норм.

Итак, имеют место два равенства

$$\mathbb{T}^* = RF_1 \mathbb{T}^t RF_2^{-1}, \quad RF_1^{-1} \mathbb{T}^* RF_2 = \mathbb{T}^t.$$

Из первого равенства получим, что

$$\|\mathbb{T}^*\| \leqslant \|\mathbb{T}^t\| = \|\mathbb{T}\|.$$

Из второго получим следующее неравенство:

$$\|\mathbb{T}\| = \|\mathbb{T}^t\| \leqslant \|\mathbb{T}^*\|.$$

Пояснения на доске!

Свойства сопряженных операторов.

Равенство нормы исходного оператора и сопряженного оператора нами уже доказано. Кроме того, имеет место свойства антилинейности операции сопряжения

$$(\alpha_1 \mathbb{T}_1 + \alpha_2 \mathbb{T}_2)^* = \overline{\alpha_1} \mathbb{T}_1^* + \overline{\alpha_2} \mathbb{T}_2^*.$$

Наконец, докажем, что $\mathbb{T}^{**} = \mathbb{T}$. Действительно,

$$(f, \mathbb{T}u)_2 = (\mathbb{T}^* f, u)_1 = \overline{(u, \mathbb{T}^* f)_1} = \overline{(\mathbb{T}^{**} u, f)_2} = (f, \mathbb{T}^{**} u)_2.$$

Самосопряженный оператор.

Определение. Оператор $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ называется самосопряженным, если имеет место равенство

$$\mathbb{T}^* = \mathbb{T}.$$

Лемма

Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ — это самосопряженный и неотрицательный оператор, т. е. удовлетворяющий свойству

$$(x, \mathbb{T}x) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{H}.$$

Тогда имеет место неравенство типа Коши–Буняковского

$$|(x, \mathbb{T}y)| \leqslant (x, \mathbb{T}x)^{1/2}(y, \mathbb{T}y)^{1/2}.$$

(Если при $x \neq \theta$ $Tx \neq \theta$, то (x, Tx) обладает всеми свойствами скалярного произведения.)

Доказательство.

Имеет место следующая цепочка выражений:

$$(x - \lambda y, \mathbb{T}(x - \lambda y)) = (x, \mathbb{T}x) + |\lambda|^2 (y, \mathbb{T}y) - \lambda(x, \mathbb{T}y) - \overline{\lambda}(y, \mathbb{T}x).$$

Пусть

$$\lambda = \frac{\overline{(x, \mathbb{T}y)}}{(y, \mathbb{T}y)}.$$

После подстановки получим, что

$$(x, \mathbb{T}x) + \frac{|(x, \mathbb{T}y)|^2}{(y, \mathbb{T}y)} - \frac{|(x, \mathbb{T}y)|^2}{(y, \mathbb{T}y)} - \frac{(x, \mathbb{T}y)(y, \mathbb{T}x)}{(y, \mathbb{T}y)} \geqslant 0,$$

из которого с учетом самосопряженности оператора $\mathbb{T}$ получим

$$(x, \mathbb{T}x) - \frac{|(x, \mathbb{T}y)|^2}{(y, \mathbb{T}y)} \geqslant 0.$$

Отсюда и вытекает неравенство.

Лемма о спектре самосопряженного, ограниченного оператора.

Лемма

Спектр самосопряженного, ограниченного оператора лежит на действительной оси.

(Заметим, что доказать лишь вещественность собственных значений самосопряженного оператора недостаточно.)

Доказательство-1.

Для всех $x \in \mathbb{H}$ и $\beta \in \mathbb{R}^1$ имеет место цепочка выражений

$$\|(A + i\beta \cdot \mathrm{id})x\|^2 = \|Ax\|^2 + \beta^2\|x\|^2 + \\ + i\beta(Ax, x) - i\beta(x, Ax) = \|Ax\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2,$$

поскольку

$$(x, Ax) = (Ax, x).$$

Доказательство-2.

Пусть

$$\mathbb{H}_0 = \mathrm{Im}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}), \quad \mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}.$$

Докажем, что $\mathbb{H}_0$ замкнуто. Пусть $\{y_n\} \subset \mathbb{H}_0$ и

$$y_n \longrightarrow y_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}_0.$$

Докажем, что $y_0 \in \mathbb{H}_0$. Действительно, имеем

$$y_n = (A + i\beta \cdot \mathrm{id})x_n, \quad \|y_{n+m} - y_n\| \geqslant \beta\|x_{n+m} - x_n\|.$$

Значит,

$$x_n \longrightarrow x_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}$$

и поэтому

$$y_0 = (A + i\beta \cdot \mathrm{id})x_0 \Rightarrow y_0 \in \mathbb{H}_0.$$

Доказательство-3.

Докажем, что $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}$. Пусть нет. Тогда найдется

$$z \in \mathbb{H}_0^{\perp}, \quad \|z\| = 1.$$

Итак, имеет место цепочка равенств

$$0 = (z, (A + i\beta \cdot \mathrm{id})z) = (z, Az) + i\beta\|z\|^2,$$

Значит,

$$0 = \mathrm{im}(z, (A + i\beta \cdot \mathrm{id})z) = \beta\|z\|^2 = \beta$$

Противоречие. Значит, $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}$.

Доказательство-4.

Итак, имеем

$$\mathrm{Im}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}) = \mathbb{H}, \quad \mathrm{Ker}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}) = 0.$$

Значит, для оператора $A + i\beta \cdot \mathrm{id}$ при $\beta \in \mathbb{R}^1$ в силу теоремы Банаха определен обратный. Заменой,

$$A \to A + \lambda_0 \cdot \mathrm{id} \quad \text{при} \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}^1,$$

Получим, что любой оператор вида

$$A + (\lambda_0 + i\beta) \cdot \mathrm{id}$$

обратим при $\beta \neq 0$ для всех $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$. Следовательно,

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}^1.$$

Введем обозначения.

$$m_- = \inf\left\{(x, Ax):\ \|x\| = 1\right\}, \quad m_+ = \sup\left\{(x, Ax):\ \|x\| = 1\right\}.$$

Теорема

$\sigma(A) \subset [m_-, m_+]$, $m_-, m_+ \in \sigma(A)$.

Доказательство-1.

Итак, пусть $\lambda > m_+$. Тогда

$$(x, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x) \geqslant (\lambda - m_+)\|x\|^2.$$

Значит, форма

$$(y, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x)$$

коэрцитивна и поэтому оператор

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - A$$

обратим. Аналогично при $\lambda < m_-$ имеем

$$(x, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x) \geqslant (m_- - \lambda)\|x\|^2$$

И, стало быть, оператор

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - A$$

обратим при $\lambda < m_-$.

Доказательство-2.

Докажем, что $m_\pm \in \sigma(A)$. Пусть $\{x_n\}$ такая последовательность, что

$$\|x_n\| = 1, \quad (x_n, Ax_n) \to m_-.$$

Пусть

$$x = x_n, \quad y = (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, \quad B = A - m_- \cdot \mathrm{id}.$$

Оператор B — неотрицателен. $\square$

$$(x, Bx) = (x, Ax) - m_-(x, x).$$

Но

$$(x, Ax) \geqslant m_- \quad \text{при} \quad \|x\| = 1.$$

$\boxtimes$

Доказательство-3.

$$|(x, By)|^2 \leqslant (x, Bx)(y, By).$$

$$(x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})^2 x_n) =$$
$$= ((A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n) = \|(A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\|^2.$$

Поэтому получим неравенство

$$\|(A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\|^4 \leqslant$$
$$\leqslant (x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n)((A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})^2 x_n) \leqslant$$
$$\leqslant (x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n)\|A - m_- \cdot \mathrm{id}\|^3 \to 0$$

при $n \to +\infty$.

Доказательство-4.

Итак, мы нашли такую последовательность $\{x_n\}$, что

$$\|x_n\| = 1, \quad y_n = (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n \to 0$$

при $n \to +\infty$. Пусть при этом

$$m_- \notin \sigma(A) \Rightarrow m_- \in \mathrm{res}(A)$$

$$x_n = R(m_-, A)y_n \Rightarrow 1 = \|x_n\| \leqslant \|R(m_-, A)\|\|y_n\| \to 0.$$

Противоречие. Значит, $m_- \in \sigma(A)$. Аналогичным образом рассмотрим

$$\|x_n\| = 1, \quad (x_n, Ax_n) \to m_+, \quad B = m_+ \cdot \mathrm{id} - A.$$

Теорема доказана.

О норме самосопряженного оператора.

Лемма

Пусть оператор $\mathbb{A}$ *является самосопряженным, тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|.$$

Доказательство-1.

Пусть

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$|(x, Ax)| \leqslant \|x\|\|Ax\| \leqslant \|x\|^2\|A\| \leqslant \|A\|.$$

Значит,

$$M \leqslant \|A\|.$$

$$((x+y), A(x+y)) - ((x-y), A(x-y)) =$$
$$= 2(x, Ay) + 2(y, Ax) = 2[(x, Ay) + \overline{(x, Ay)}] = 4\,\mathrm{Re}(x, Ay).$$

Доказательство-2.

Поэтому

$$\operatorname{Re}(x, Ay) = \frac{1}{4}\left[((x+y), A(x+y)) - ((x-y), A(x-y))\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{4}\left[\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2\right] = \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right].$$

Положим в этом неравенстве

$$x = \frac{Ay}{\|Ay\|}$$

и получим неравенство

$$\|Ay\| \leqslant \frac{M}{2}\left[1 + \|y\|^2\right] \leqslant M \quad \text{при} \quad \|y\| = 1.$$

Итак,

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \leqslant M \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|y\|=1} |(y, Ay)|.$$

Лемма

Пусть A — самосопряженный ограниченный оператор, тогда

$$\|A^2\| = \|A\|^2.$$

$\square$

$$\|A^2\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, A^2x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, Ax)| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2.$$

$\boxtimes$

Спектральный радиус самосопряженного оператора.

Лемма

Пусть A — самосопряженный, ограниченный оператор. Тогда

$$r(A) = \|A\|.$$

$\square$

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{2n\to+\infty} \|A^{2n}\|^{1/(2n)} = \lim_{2n\to+\infty} \|A\| = \|A\|.$$

$\boxtimes$