Лекция 9. Банаховы пространства. Транспонированный оператор и плотные вложения банаховых пространств.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

29 октября 2011 г.

Обозначения.

Пусть заданы два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ с нормами

$$\|\quad\|_e \quad \text{и} \quad \|\quad\|_f$$

и с соответствующими сопряженными $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ относительно скобок двойственности:

$$\langle e^*, e\rangle_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad e^* \in \mathbb{E}^*$$

и

$$\langle f^*, f\rangle_f \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Введем стандартным образом скобки двойственности между парами банаховых пространств $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{E}^{**}$, а также $\mathbb{F}^*$ и $\mathbb{F}^{**}$:

$$\langle e^{**}, e^*\rangle_{e*} \quad \text{для всех} \quad e^* \in \mathbb{E}^* \quad \text{и} \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$$

и

$$\langle f^{**}, f^*\rangle_{f*} \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^* \quad \text{и} \quad f^{**} \in \mathbb{F}^{**}.$$

Норма оператора.

Пусть $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

$$\|\mathbb{T}\|_{e \to f} \equiv \sup_{\|e\|_e = 1} \|\mathbb{T}e\|_f .$$

Лемма

Для произвольного оператора $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *имеет место неравенство*:

$$\|\mathbb{T}e\|_f \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e \to f} \|e\|_e \quad \textit{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Транспонированный оператор.

Определение. *Оператором, транспонированным к* $\mathbb{T}$, *называется оператор*

$$\mathbb{T}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*, \tag{1}$$

определяемый следующим образом:

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e \equiv \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f . \tag{2}$$

Пояснить корректность на доске.

Теорема о норме транспонированного оператора.

Теорема

Если $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}\left(\mathbb{E}, \mathbb{F}\right)$, *то* $\mathbb{T}^t \in \mathfrak{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$. *Причем*

$$\|\mathbb{T}\|_{e\to f} = \|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*}.$$

Доказательство-1.

Прежде всего опишем как определяется норма в, очевидно, банаховом пространстве $\mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$. Действительно, имеем

$$\|\mathbb{A}\|_{f^* \to e^*} \equiv \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \|\mathbb{A} f^*\|_{e*},$$

где нормы в сопряженных пространствах $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ определяются стандартным образом, т. е.

$$\|e^*\|_{e*} \equiv \sup_{\|e\|_e=1} |\langle e^*, e\rangle_e| \quad \text{и} \quad \|f^*\|_{f*} \equiv \sup_{\|f\|_f=1} |\langle f^*, f\rangle_f| .$$

Доказательство-2.

Докажем сначала линейность оператора $\mathbb{T}^t$. Действительно, имеем следующую цепочку равенств

$$\left\langle \mathbb{T}^t\left(\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^*\right), e\right\rangle_e \equiv \left\langle\left(\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^*\right), \mathbb{T}e\right\rangle_f =$$
$$= \alpha_1 \left\langle f_1, \mathbb{T}e\right\rangle_f + \alpha_2 \left\langle f_2, \mathbb{T}e\right\rangle_f = \alpha_1 \left\langle \mathbb{T}^t f_1, e\right\rangle_e + \alpha_2 \left\langle \mathbb{T}^t f_2, e\right\rangle_e =$$
$$= \left\langle \alpha_1 \mathbb{T}^t f_1 + \alpha_2 \mathbb{T}^t f_2, e\right\rangle_e, \quad \text{для всех} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad f_1, f_2 \in \mathbb{F}.$$

Докажем теперь ограниченность оператора $\mathbb{T}^t$. Действительно, в силу лемм 1 и 10 имеем

$$\left|\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e\right\rangle_e\right| = \left|\left\langle f^*, \mathbb{T}e\right\rangle_f\right| \leqslant \|f^*\|_{f*}\|\mathbb{T}e\|_f \leqslant \|f^*\|_{f*}\|\mathbb{T}\|_{e\to f}\|e\|_e. \tag{3}$$

Доказательство-3.

Теперь из определения нормы в банаховом пространстве следует, что

$$\|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*} \equiv \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \|\mathbb{T}^t f^*\|_{e*} = \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \sup_{\|e\|_e=1} \left|\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e\right\rangle_e\right|. \tag{4}$$

Без ограничения общности можно считать, что в неравенстве (3) $f^* \neq \theta$ и $e \neq \theta$. Тогда из (3) получим неравенство

$$\left|\left\langle \mathbb{T}^t \frac{f^*}{\|f^*\|_{f*}}, \frac{e}{\|e\|_e}\right\rangle_e\right| \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f}.$$

Отсюда и из (4) вытекает неравенство

$$\|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*} \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f}. \tag{5}$$

Отсюда вытекает ограниченность оператора $\mathbb{T}^t$. Стало быть, $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$.

Доказательство-4.

Докажем теперь, что имеет место неравенство

$$\|\mathbb{T}\|_{e\to f} \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*}. \tag{6}$$

Действительно, поскольку $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$, то в силу лемм 1 и 10 имеет место цепочка выражений

$$\left|\langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f\right| = \left|\langle \mathbb{T}^t f^*, e\rangle_e\right| \leqslant \|\mathbb{T}^t f^*\|_{e*}\|e\|_e \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*}\|f^*\|_{f*}\|e\|_e. \tag{7}$$

Теперь по определению нормы в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ имеем цепочку равенств

$$\|\mathbb{T}\|_{e\to f} \equiv \sup_{\|e\|_e=1} \|\mathbb{T}e\|_f = \sup_{\|e\|_e=1} \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \left|\langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f\right|. \tag{8}$$

Без ограничения общности можно считать, что $e \neq \theta$ и $f^* \neq \theta$.

Доказательство-5.

Тогда из (7) получим неравенство

$$\left|\left\langle \frac{f^*}{\|f^*\|_{f*}}, \mathbb{T}\frac{e}{\|e\|_e} \right\rangle_f\right| \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*}.$$

Отсюда и из равенства (8) получим неравенство (6), из которого и из (5) получаем второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Инъективные и неинъективные операторы.

Оператор $\mathbb{T} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ является инъективным, если из условия $\mathbb{T}e = 0$ вытекает, что $e = \theta$.

Оператор $\mathbb{T}$ является не инъективным в том случае, если существует такой элемент $\overline{e} \neq \theta$, что $\mathbb{T}\overline{e} = \vartheta$.

По определению оператора $\mathbb{T}^t$ имеет место равенство

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, \overline{e} \right\rangle_e = \left\langle f^*, \mathbb{T}\overline{e} \right\rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{9}$$

Определение. *Множество* $\mathrm{A}^* \subset \mathbb{E}^*$ *называется ортогональным ко множеству* $\mathrm{A} \subset \mathbb{E}$ *относительно скобок двойственности между этими банаховыми пространствами, если*

$$\langle a^*, a \rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathrm{A} \quad \textit{и} \quad a^* \in \mathrm{A}^*.$$

Свойства-1.

Пусть теперь $\{f_n^*\} \subset \mathbb{F}^*$ — это сильно сходящаяся к некоторому элементу $f^* \in \mathbb{F}^*$ последовательность, т.е.

$$\|f_n^* - f^*\|_{f*} = \sup_{\|f\|_f = 1} |\langle f_n^* - f^*, f\rangle_f| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда из равенства (9) получим, что

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f_n^*, \overline{e} \right\rangle_e \to \left\langle \mathbb{T}^t f^*, \overline{e} \right\rangle_e = 0.$$

Тем самым мы получаем, что замыкание множества $\left\{\mathbb{T}^t \mathbb{F}^*\right\}$ не совпадает с $\mathbb{E}^*$, т. е. множество $\left\{\mathbb{T}^t \mathbb{F}^*\right\}$ не плотно в $\mathbb{E}^*$.

Свойства-2.

Заметим, что имеет место обратное утверждение: если множество $\{\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*\}$ плотно в $\mathbb{E}^*$, то оператор $\mathbb{T}$ инъективен. Действительно, пусть

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*,$$

следовательно, в силу плотности множества $\{\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*\}$ в $\mathbb{E}^*$ получаем, что $e = \theta$. С другой стороны, имеем

$$\langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Стало быть, $\mathbb{T}e = \theta$. Значит, приходим к выводу, что из условия $\mathbb{T}e = \theta$ вытекает $e = \theta$.

Операторы топологического вложения.

Теперь рассмотрим частный случай операторов из банахова пространства $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, а именно линейный, непрерывный и инъективный оператор

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}.$$

Во-первых, этот оператор линейный, т. е.

$$\mathbb{J}_{ef}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 \mathbb{J}_{ef} e_1 + \alpha_2 \mathbb{J}_{ef} e_2 \ \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \text{ и } e_1, e_2 \in \mathbb{E}.$$

Во-вторых, этот оператор непрерывный, т. е. в силу линейности — ограниченный

$$\|\mathbb{J}_{ef} e\|_f \leqslant c_1 \|e\|_e.$$

Далее мы будем использовать следующее обозначение:

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

Теорема о транспонированном операторе.

Теорема

Пусть $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *— это два банаховых пространства и* $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. *Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $\mathbb{T}(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{T}^t$ *— является инъективным;*

(ii) $\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow \mathbb{T}$ *— является инъективным, причем имеет место обратное утверждение при условии, что* $\mathbb{E}$ *рефлексивно.*

Доказательство утверждения (i)-1.

Итак, пусть $\mathbb{T}^t f^* = 0$, тогда для всех $e \in \mathbb{E}$ имеем равенства

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f ,$$

но тогда в силу плотности $\mathbb{T}\mathbb{E}$ в $\mathbb{F}$ получаем, что единственным продолжением функционала f^* ортогонального $\mathbb{T}\mathbb{E}$ является функционал ортогональный всему пространству $\mathbb{F}$, стало быть, $f^* = \theta$.

Доказательство утверждения (i)-2.

Докажем теперь утверждение в другую сторону.

Пусть $\mathbb{T}^t$ инъективен. Докажем, что если $f^* \in \mathbb{F}^*$ есть нуль на $\mathbb{T}\mathbb{E}$, то f^* есть нуль на $\mathbb{F}$.

Откуда и следует в силу теоремы Хана–Банаха плотность множества $\mathbb{T}\mathbb{E}$ в $\mathbb{F}$.

Доказательство утверждения (i)-3.

Действительно, равенство

$$\langle f^*, f \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{T}\mathbb{E}$$

эквивалентно равенству

$$\langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Но последнее равенство равно в силу определения $\mathbb{T}^t$ равно

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Отсюда сразу же получаем, что $\mathbb{T}^t f^* = \theta$. Откуда в силу инъективности $\mathbb{T}^t$ приходим к выводу, что $f^* = \theta$. Значит,

$$\mathbb{T}(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

Пояснить на доске.

Доказательство утверждения (ii)-1.

Итак, пусть

$$\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*$$

и $\mathbb{T}e = 0$. Тогда из равенства

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*$$

получаем, что $e \in \mathbb{E}$ ортогонально всему пространству $\mathbb{E}^*$, а значит, $e = \theta$.

Доказательство утверждения (ii)-2.

Пусть теперь $\mathbb{T}$ является инъективным.

Попробуем доказать требуемое утверждение как и на шаге (i).

Итак, надо доказать, что функционал $e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$ равный нулю на $\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*$ равен нулю и на всем $\mathbb{E}^*$, откуда в силу теоремы Хана–Банаха получим требуемый результат.

Пояснить на доске.

Доказательство утверждения (ii)-3.

Пусть имеет место равенство

$$\langle e^{**}, e^{*}\rangle_{e*} = 0 \quad \text{для всех} \quad e^{*} \in \mathbb{T}^{t}\mathbb{F}^{*},$$

которое эквивалентно

$$\left\langle e^{**}, \mathbb{T}^{t} f^{*}\right\rangle_{e*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^{*} \in \mathbb{F}^{*}.$$

Но последнее выражение равно

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} e^{**}, f^{*}\right\rangle_{f*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^{*} \in \mathbb{F}^{*},$$

где $\mathbb{T}^{tt}$ — есть транспонированный к $\mathbb{T}^{t}$. Из последнего равенства сразу же получаем, что

$$\mathbb{T}^{tt} e^{**} = \theta.$$

И тут мы сталкиваемся с трудностью: **из инъективности оператора $\mathbb{T}$, вообще говоря, не следует инъективность оператора $\mathbb{T}^{tt}$.**

Доказательство утверждения (ii)-4.

Поэтому нужно изучить явное представление оператора $\mathbb{T}^{tt}$ через оператор $\mathbb{T}$.
Рассмотрим транспонированный оператор $\mathbb{T}^{tt}$ к оператору $\mathbb{T}^{t}$.
Действительно, по определению имеем

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} e^{**}, f^{*} \right\rangle_{f*} = \left\langle e^{**}, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*} \quad \forall \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad f^{*} \in \mathbb{F}^{*}. \tag{10}$$

С учетом того, что имеет изометрически изоморфные вложения

$$\mathbb{J}_e : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad \mathbb{J}_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^{**}$$

мы можем переписать (10) в следующем виде

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} \mathbb{J}_e e, f^{*} \right\rangle_{f*} = \left\langle \mathbb{J}_e e, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*}. \tag{11}$$

С другой стороны, имеем равенства

$$\left\langle \mathbb{J}_e e, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*} = \left\langle \mathbb{T}^{t} f^{*}, e \right\rangle_{e} = \left\langle f^{*}, \mathbb{T} e \right\rangle_{f} = \left\langle \mathbb{J}_f \mathbb{T} e, f^{*} \right\rangle_{f*}$$

Доказательство утверждения (ii)-4.

Отсюда и из (11) получим равенство

$$\mathbb{T}^{tt}\mathbb{J}_e = \mathbb{J}_f\mathbb{T}.$$

В силу рефлексивности пространства $\mathbb{E}$ существует обратный оператор $\mathbb{J}_e^{-1}$ и поэтому получаем равнство

$$\mathbb{T}^{tt} = \mathbb{J}_f\mathbb{T}\mathbb{J}_e^{-1}.$$

Отсюда из инъективности $\mathbb{T}$ вытекает инъективность оператора $\mathbb{T}^{tt}$, а стало быть, получаем, что

$$\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*.$$

Теорема доказана.

Приложение для оператора топологического вложения.

Теперь достаточно применить общий результат теоремы к важному частному случаю оператора инъективного и непрерывного вложения

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$$

и транспонированного оператора

$$\mathbb{J}_{ef}^{t} : \mathbb{F}^{*} \to \mathbb{E}^{*}.$$

Теорема

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — это два банаховых пространства и $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Тогда имеют место следующие утверждения

(i) $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{J}_{ef}^{t}$ *— является инъективным;*

(ii) $\mathbb{F}^{*} \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^{*} \Rightarrow \mathbb{J}_{ef}$ *— является инъективным, причем имеет место обратное утверждение при условии, что $\mathbb{E}$ рефлексивно.*

Постановка важных вопросов.

Пусть у нас имеются два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ такие, что их пересечение $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и их сумма $\mathbb{E} + \mathbb{F}$ тоже банаховые пространства относительно некоторых норм.

Что можно сказать о соответствующих сопряженных пространствах $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$ и $(\mathbb{E} + \mathbb{F})^*$?

Для ответа на эти вопросы начнем с аккуратного построения банаховых пространств $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и $\mathbb{E} + \mathbb{F}$.

Пересечение банаховых пространств.

Лемма

Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ непрерывно вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$, тогда множество $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} \equiv \|u\|_e + \|u\|_f.$$

Доказательство-1.

Проверим, что (??) является нормой. Пусть

$$\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} = 0.$$

Тогда $\|u\|_e = 0$ и $\|u\|_f = 0$. Отсюда приходим к выводу, что, с одной стороны, $u = \theta_e$ — нуль пространства $\mathbb{E}$, с другой стороны, $u = \theta_f$ — нуль пространства $\mathbb{F}$.

Но поскольку оба пространства вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$, то приходим к выводу, что $u = \theta_e = \theta_f = \theta \in \mathbb{V}$.

Доказательство-2.

Итак, пусть $\{u_n\} \subset \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ — фундаментальна по введенной норме, тогда, очевидно, она фундаментальна по каждой в отдельности норме пространств $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$. В силу полноты этих пространств приходим к выводу, что

$$u_n \to u_e \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{E}$$

и

$$u_n \to u_f \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{F}.$$

Но поскольку банаховы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ непрерывно вложены в локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$, то приходим к выводу, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в $\mathbb{V}$ к пределу $u_0 = u_e = u_f$.

Сумма банаховых пространств.

Лемма

Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *непрерывно вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$. *Тогда множество*

$$\mathbb{E}+\mathbb{F} \equiv \left\{ u+v \middle| \, u \in \mathbb{E}, v \in \mathbb{F} \right\}$$

можно превратить в банахово пространство относительно нормы

$$\|w\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} \equiv \inf_{u\in\mathbb{E}, v\in\mathbb{F},\ u+v=w} \max\left(\|u\|_e, \|v\|_f\right).$$

Пояснить, что это не прямая сумма банаховых пространств.

Доказательство-1.

Пусть

$$\|w\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} = 0.$$

Тогда вытекает, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие элементы $u_n \in \mathbb{E}$ и $v_n \in \mathbb{F}$, что

$$w = u_n + v_n, \quad \|u_n\|_e < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \|v_n\|_f < \frac{1}{n}.$$

Отсюда приходим к выводу, что $u_n \to \theta_e$ сильно в $\mathbb{E}$, а $v_n \to \theta_f$ сильно в $\mathbb{F}$.

Но поскольку оба банаховых пространства вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство, то $u_n + v_n \to \theta = \theta_e = \theta_f$ в $\mathbb{V}$. Значит, $w = \theta$.

Доказательство-2.

Докажем теперь полноту пространства $\mathbb{E} + \mathbb{F}$.

Пусть $\{w_n\} \subset \mathbb{E} + \mathbb{F}$ фундаментальная относительно введенной нормы.

Тогда из нее можно выделить такую подпоследовательность $\{w_{n_k}\} \subset \{w_n\}$, что

$$\|w_{n_k} - w_{n_{k-1}}\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} < 2^{-k} \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{N},$$

По определению нормы найдутся такие последовательности $\{u_k\} \subset \mathbb{E}$ и $\{v_k\} \subset \mathbb{F}$, что

$$w_{n_k} - w_{n_{k-1}} = u_k + v_k, \quad \|u_k\|_e < 2^{1-k}, \quad \|v_k\|_f < 2^{1-k},$$

$$w_{n_0} = u_0 + v_0 \quad \text{для} \quad u_0 \in \mathbb{E}, \quad v_0 \in \mathbb{F}.$$

Доказательство-3.

По построению имеем

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \to u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{E} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \to v = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{F} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Действительно, имеют место оценки

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} u_k \right\|_e \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{1-k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} v_k \right\|_f \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{1-k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство-4.

Положим

$$w = u + v,$$

тогда имеем

$$\|w - w_{n_k}\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} \leqslant \max\left(\|u - u_{n_k}\|_e, \|v - v_{n_k}\|_f\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теперь в силу неравенства треугольника имеем неравенство:

$$\|w - w_n\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} \leqslant \|w - w_{n_k}\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} + \|w_{n_k} - w_n\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}}$$

откуда из фундаментальности $\{w_n\}$ и предыдущего неравенства получаем, что

$$w_n \to w \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{E} + \mathbb{F}$$

относительно введенной нормы.

Теорема доказана.

Декартово произведение банаховых пространств.

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ банаховы пространства. Тогда их декартово произведение $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ можно сделать банаховым пространством относительно следующей нормы:

$$\|\{u, v\}\| \equiv \|u\|_e + \|v\|_f. \tag{12}$$

И здесь не нужно условия вложения банаховых пространств $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ в локально выпуклое пространство! Проверьте сами.

Сопряженное к пересечения банаховых пространств.

Теорема

Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *непрерывно вложены в локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$. *Пусть банахово относительно введенной нормы пространство* $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ *плотно вложено в* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$. *Тогда имеем*

$$(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* = \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

Причем равенство понимается в том смысле, что это одно и тоже банахово пространство.

Доказательство-1.

Сначала докажем, что

$$(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* = \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

имеет место в смысле равенства множеств.

Итак, докажем, что $\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$.

Действительно, в силу условия теоремы банахово пространство $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ плотно как в $\mathbb{E}$ так и в $\mathbb{F}$. Поэтому из результата (i) доказанной уже теоремы приходим к выводу, что имеют место вложения

$$\mathbb{E}^* \subset (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*,$$

а значит,

$$\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*.$$

Доказательство-2.

Докажем теперь обратное включение:

$$(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* \subset \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

Введем ряд обозначений. Рассмотрим скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$

$$\langle f, u \rangle_{e \cap f} \quad \text{для всех} \quad f \in (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad u \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}. \tag{13}$$

Доказательство-3.

Заметим, что тогда сопряженное пространство $(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*$ банахово относительно следующей нормы

$$\|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \equiv \sup_{\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}}=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right|.$$

Теперь рассмотрим декартово произведение банаховых пространств $\mathbb{E}\times\mathbb{F}$ и сопряженное к нему $(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*$ относительно скобок двойственности

$$\langle\mathfrak{F},\mathfrak{U}\rangle_{e\times f} \quad \text{для всех} \quad \mathfrak{F}\in(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad \mathfrak{U}\in\mathbb{E}\times\mathbb{F}.$$

Рассмотрим следующее подпространство в декартовом произведении банаховых пространств $\mathbb{E}\times\mathbb{F}$:

$$\mathbb{W} = \left(\{u,u\}\,\middle|\, u\in\mathbb{E}\cap\mathbb{F}\right).$$

Доказательство-4.

Для заданного $f \in (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$ определим функционал $\mathcal{F}$ на $\mathbb{W}$ соотношением

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{U} \rangle_{e \times f} \equiv \langle f, u \rangle_{e \cap f},$$

где $u \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и $\mathcal{U} = \{u, u\}$. Проверим, что так введенный функционал $\mathcal{F}$ на подпространстве $\mathbb{W}$ действительно является линейным и непрерывным. Проверим линейность. Справедлива цепочка равенств:

$$\langle \mathcal{F}, \alpha_1 \mathcal{U}_1 + \alpha_2 \mathcal{U}_2 \rangle_{e \times f} = \langle f, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rangle_{e \cap f} =$$

$$= \alpha_1 \langle f, u_1 \rangle_{e \cap f} + \alpha_2 \langle f, u_2 \rangle_{e \cap f} =$$

$$= \alpha_1 \langle \mathcal{F}, \mathcal{U}_1 \rangle_{e \times f} + \alpha_2 \langle \mathcal{F}, \mathcal{U}_2 \rangle_{e \times f} \quad \forall \quad u_1, u_2 \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство-5.

Теперь мы должны доказать непрерывность так введенного функционала $\mathcal{F}$. Действительно, пусть имеется последовательность элементов $\{\mathcal{U}_n\} \subset \mathbb{W}$ сильно сходящаяся в $\mathbb{W}$ к некоторому элементу $\mathcal{U} \in \mathbb{W}$. По определению $\mathbb{W}$ это означает, что

$$\|\{u_n, u_n\} - \{u, u\}\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

В свою очередь это означает, что $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ относительно нормы. Тогда имеет место предельное равенство:

$$\left|\langle \mathcal{F}, \mathcal{U}_n - \mathcal{U}\rangle_{e\times f}\right| = \left|\langle f, u_n - u\rangle_{e\cap f}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \|u_n - u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, непрерывность $\mathcal{F}$ доказана. Стало быть, $\mathcal{F} \in \mathbb{W}^*$.

Доказательство-6.

Причем имеет место цепочка равенств

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}^*} \equiv \sup_{\|\mathcal{U}\|_{\mathbb{W}}=1} \left|\langle \mathcal{F}, \mathcal{U}\rangle_{e\times f}\right| =$$

$$= \sup_{\|\mathcal{U}\|_{\mathbb{W}}=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| = \sup_{\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}}=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| \equiv \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}.$$

По теореме Хана–Банаха функционал $\mathcal{F}$ можно продолжить с подпространства $\mathbb{W} \subset \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ на все банахово пространство $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ с сохранением нормы. Для удобства продолженный функционал будем обозначать также через $\mathcal{F}$. Причем имеют место равенства

$$\|\mathcal{F}\|_{(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*} = \|\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}^*} = \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}.$$

Доказательство-7.

Теперь введем функционалы $g \in \mathbb{E}^*$ и $h \in \mathbb{F}^*$ следующим образом

$$\langle g, u\rangle_e = \langle \mathcal{F}, \{u, \theta_f\}\rangle_{e\times f}\,, \quad \langle h, v\rangle_f = \langle \mathcal{F}, \{\theta_e, v\}\rangle_{e\times f} \ \forall\, u \in \mathbb{E}, v \in \mathbb{F}, \tag{14}$$

где θ_e — это нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{E}$, а θ_f — нулевой элемент из $\mathbb{F}$.

Можно проверить, что так определенные функционалы g и h линейны и непрерывны. Заметим, что из определения функционалов g и h (14) вытекает цепочка соотношений:

$$\|g\|_{e*} \equiv \sup_{\|u\|_e=1} |\langle g, u\rangle_e| = \sup_{\|u\|_e=1} \left|\langle \mathcal{F}, \{u, \theta_f\}\rangle_{e\times f}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\{u,v\}\|_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}}=1} \left|\langle \mathcal{F}, \{u, v\}\rangle_{e\times f}\right| \equiv \|\mathcal{F}\|_{(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*} = \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}$$

Доказательство-8.

И аналогичные соотношения для $h \in \mathbb{F}^*$

$$\|h\|_{f*} \equiv \sup_{\|v\|_f=1} |\langle h, v\rangle_f| = \sup_{\|v\|_f=1} \left|\langle \mathfrak{F}, \{\theta_e, v\}\rangle_{e\times f}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|\{u,v\}\|_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}}=1} \left|\langle \mathfrak{F}, \{u, v\}\rangle_{e\times f}\right| \equiv \|\mathfrak{F}\|_{(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*} = \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}.$$

Из этих двух цепочек неравенств получаем, что

$$\max\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\} \leqslant \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}.$$

В силу определения функционалов $g \in \mathbb{E}^*$ и $h \in \mathbb{F}^*$ (13) получаем, что

$$\langle g, u\rangle_e + \langle h, u\rangle_f = \langle \mathfrak{F}, \{u, \theta_f\}\rangle_{e\times f} + \langle \mathfrak{F}, \{\theta_e, u\}\rangle_{e\times f} =$$
$$= \langle \mathfrak{F}, \{u, u\}\rangle_{e\times f} = \langle f, u\rangle_{e\cap f} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E}\cap\mathbb{F},$$

но отсюда сразу же получаем, что $f = g + h \in \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*$.

Доказательство-9.

Отсюда, в частности, вытекает неравенство

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} \leqslant \max\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\} \leqslant \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}. \qquad (15)$$

Ну и конечно, доказали включение

$$(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^* \subset \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

Нам осталось доказать, что множества совпадают и как топологические пространства. Для этого нужно доказать, что

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} = \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}.$$

Доказательство-10.

В силу (15) осталось доказать, что

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} \geqslant \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}\,. \tag{16}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств

$$\|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \equiv \sup_{\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}}=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| = \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| =$$

$$= \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} |\langle g, u\rangle_e + \langle h, u\rangle_f| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} [\|g\|_{e*}\|u\|_e + \|h\|_{f*}\|u\|_f] \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\}\,.$$

Доказательство-11.

Таким образом, получили неравенство

$$\|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \leqslant \max\left\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\right\}.$$

Возьмем от обеих частей этого неравенства infimum по всевозможным $g \in \mathbb{E}^*$, $h \in \mathbb{F}^*$ и таким, что $f = g + h$. Тогда получим неравенство

$$\|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \leqslant \inf_{g\in\mathbb{E}^*, h\in\mathbb{F}^*,\ f=g+h} \max\left\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\right\} \equiv \|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*}.$$

Таким образом, (16) доказано. Из (15) вытекает равенство норм пространств $\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*$ и $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$. Значит, в силу равенств их как множеств вытекает, что они одно и тоже банахово пространство.

Теорема доказана.

Сопряженное к сумме банаховых пространств.

Аналогичный результат справедлив и для $(\mathbb{E}+\mathbb{F})^*$. Именно, справедлива следующая теорема:

Теорема

Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *непрерывно вложены в локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$. *Пусть банахово относительно введенной нормы пространство* $\mathbb{E}\cap\mathbb{F}$ *плотно вложено в* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$. *Тогда имеем*

$$(\mathbb{E}+\mathbb{F})^* = \mathbb{E}^*\cap\mathbb{F}^*.$$

Причем равенство понимается в том смысле, что это одно и тоже банахово пространство.

Оператор топологического вложения.

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ два банаховых пространства и $\mathbb{E}$ рефлексивно, причем $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$, т. е. существует такой линейный, инъективный и непрерывный оператор вложения

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F},$$

причем $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$ плотно в $\mathbb{F}$.

Таким образом, каждому элементу $u \in \mathbb{E}$ сопоставляется некоторый элемент $v = \mathbb{J}_{ef} u$.

С другой стороны, для оператора $\mathbb{J}_{ef}$ определен транспонированный оператор

$$\mathbb{J}^t_{ef} : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*,$$

причем в силу теоремы 16 оператор $\mathbb{J}^t_{ef}$ является линейным, непрерывным, инъективным, причем $\mathbb{J}^t_{ef}\mathbb{F}^*$ плотно в $\mathbb{E}^*$.

Равенство скобок двойственности.

Таким образом, каждому элементу $f \in \mathbb{F}^*$ соответствует некоторый элемент $\mathbb{J}_{ef}^t f \in \mathbb{E}^*$.

По определению транспонированного оператора выполнено равенство:

$$\left\langle \mathbb{J}_{ef}^t f, u \right\rangle_e = \left\langle f, \mathbb{J}_{ef} u \right\rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \qquad (17)$$

Однако, если мы отождествим $\mathbb{E}$ с его образом в $\mathbb{F}$, т. е. с $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$, а $\mathbb{F}^*$ отождествим с его образом в $\mathbb{E}^*$, т. е. с $\mathbb{J}_{ef}^t\mathbb{F}^*$, тогда (17) можно переписать в более простом виде, как это всегда и делается:

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*, \qquad (18)$$

причем имеют место плотные вложения

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*. \qquad (19)$$

Теорема о равенстве скобок двойственности.

Теорема

Пусть банахово пространство $\mathbb{E}$ *непрерывно и плотно вложено в банахово пространство* $\mathbb{F}$, *тогда имеет место равенство*

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{20}$$