Задачи вступительного экзамена по математике
на физический факультет МГУ

Вариант 1 (июль 2002)

1. Решить уравнение $\cos 5x$-$\cos 15x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ctg } 5x$.

2. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2-x}}{3-2x}<1$.

3. Решить неравенство $15\cdot\frac{4^{x-2}}{4^x-3^x} > 1+\left(\frac{3}{4}\right)^x$.

4. Около окружности радиуса 3 описана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($BC \quad || \quad AD$), площадь которой равна 48. Окружность касается сторон AB и CD в точках K и L. Найти KL.

5. Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму числу прибавить 1, а от третьего числа отнять 5, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

6. В пирамиде $SBCD$ каждое ребро равно 3. На ребре SB взята точка A так, что SA:AB=1:2. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SACD$.

7. Для каждого значения a решить неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(x^2-6x-a^2-5a+12) < -1$ и найти, при каких значениях a множество точек x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

8. В треугольнике KLM отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 3. Вписанная окружность касается его сторон ΔKLM в точках A, B и C. Найти отношение площади ΔKLM к площади ΔABC.

Вариант 2 (июль 2002)

1. Решить уравнение $\sin 6x$+$\sin 2x = \frac{1}{2}\text{tg } 2x$.

2. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x-2}}{2x-5}<1$.

3. Решить неравенство $63\cdot\frac{2^{x-4}}{2^{x+1}-5^x} > 2+\left(\frac{5}{2}\right)^x$.

4. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 4, которая касается боковых сторон трапеции в точках B и C, $BC = \frac{32}{5}$. Найти площадь трапеции.

5. Три числа, сумма которых равна 24, образуют арифметическую прогрессию. Если от первого числа отнять 1, ко второму числу прибавить 1, а к третьему числу прибавить 15, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

6. В пирамиде $SLMN$ каждое ребро равно 4. На ребре SN взята точка K так, что SK:KN=3:1. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SKLM$.

7. Для каждого значения a решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-a^2+a+11) < -3$ и найти, при каких значениях a множество точек x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше 2.

8. Окружность, вписанная в треугольник BCD, касается его сторон в точках L, M и N. Площадь ΔBCD в 4 раза больше площади ΔLMN. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей для ΔBCD.

Вариант 1 (июль 2002)

1. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, x=(-1)$^k\frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}$.
2. x<1, $\frac{3}{2}$<x ⩽2.
3. 0<x<$\log_{3/4}\frac{1}{4}$.
4. $\frac{9}{2}$.
5. 4, 8, 16; 16, 8, 4.
6. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$.
7. При -3<a<-2: x – любое; при a ⩽-3 и a ⩾-2: x<3-$\sqrt{a^2+5a+6}$ и x>3+$\sqrt{a^2+5a+6}$;
-$\frac{1}{2}$(5+$\sqrt{13}$)<a ⩽-3 и -2⩽ a<$\frac{1}{2}$(-5+$\sqrt{13}$).
8. 6.

Вариант 2 (июль 2002)

1. $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.
2. 2⩽ x<$\frac{5}{2}$, x>3.
3. $\log_{5/2}\frac{1}{4}$<x<$\log_{5/2}2$.
4. 80.
5. 4, 8, 12; 28, 8, -12.
6. $\frac{\sqrt{86}}{4}$.
7. При –1<a<2: x – любое; при a ⩽-1 и a ⩾2: x<1-$\sqrt{a^2-a-2}$ и x>1+$\sqrt{a^2-a-2}$;
$\frac{1}{2}$(1-$\sqrt{13}$)<a ⩽-1 и 2⩽ a<$\frac{1}{2}$(1+$\sqrt{13}$).
8. $\frac{1}{2}$.