Задачи вступительного экзамена по математике на физическом факультете МГУ

Вариант 1 (март 2002)

1. Решить уравнение $2\sin^2 4x\cdot \mathrm{tg}(\sin x)+\cos 8x=1$.

2. Решить уравнение

$$2^{\log_{(x+1)}[(x+1)(9x^2+6x+1)]}-2^{(2\log_2 3)+\log_{(x+1)}(3x+1)}+4=0.$$

3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{9+4x-x^2}}{3-x}<1$.

4. Точка C делит хорду AB окружности радиуса 6 на отрезки $AC=4$ и $CB=5$. Найти минимальное из расстояний от точки C до точек окружности.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5\sqrt{2x^2-y^4}=4x-3y, \\ 4\sqrt{2x^2-y^4}=3x-2y. \end{cases}$

6. Конус вложен в двугранный угол так, что каждой грани двугранного угла принадлежит только одна образующая конуса. Двугранный угол равен β, а угол в осевом сечении конуса при его вершине равен $\beta/2$. Найти угол между осью конуса и ребром двугранного угла.

7. Для каждого значения решить систему

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x+9\log_8^2 y\leqslant 4(a^2+a), \\ \log_2^2 xy\geqslant 8(a^2+a). \end{cases}$$

8. Внутри прямоугольного ΔABC ($\angle C$ – прямой) взята точка O так, что $OA=OB=b$. В ΔABC CD – высота, точка E – середина отрезка OC, $DE=a$. Найти CE.

Вариант 2 (март 2002)

1. Решить уравнение $2\sqrt{3}\cos^2 3x\cdot \mathrm{tg}(\cos x)$-$\cos 6x=1$.

2. Решить уравнение

$$3^{\log_{(x-1)}[(x-1)(9x^2-30x+25)]}-7\cdot 3^{(2\log_3 2)+\log_{(x-1)}(3x-5)}+9=0.$$

3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{12+2x-x^2}}{x-2}>1$.

4. На хорде KL окружности радиуса 7 взята точка M, $KM=5$ и $ML=6$. Найти максимальное из расстояний от точки M до точек окружности.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} 7\sqrt{3y^2-2x^4}=x-2y, \\ 6\sqrt{3y^2-2x^4}=3x-y. \end{cases}$

6. В двугранный угол помещен конус так, что каждой грани двугранного угла принадлежит только одна образующая конуса. Угол между осью конуса и ребром двугранного угла равен α, а угол в осевом сечении конуса при его вершине $\alpha/2$. Найти двугранный угол.

7. Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} \log_6^2 x+4\log_{36}^2 y\leqslant 9(a^2-a), \\ \log_6^2 \frac{x}{y}\geqslant 18(a^2-a). \end{cases}$$

8. В прямоугольном ΔKLM ($\angle L$ – прямой) LN – высота. Вне ΔKLM взята точка O так, что $OK=OM=m$ и отрезок ON пересекает отрезок LM. Точка E – середина отрезка OL, $NE=n$. Найти LE.

Вариант 1 (март 2002)

1. $(-1)^k \arcsin\pi/4 + k\pi$, $n\pi/4$.
2. 1.
3. $3 < x \leqslant 2+\sqrt{13}$, $2-\sqrt{13} \leqslant x < 0$.
4. 2.
5. $x = y = 0$, $x = 2y = 2\sqrt{3}$.
6. $\arcsin\frac{1}{2\cos{}^{\beta}\!/_{4}}$.
7. $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 0$, $x = y = 2^{\pm\sqrt{2a(a+1)}}$.
8. $\sqrt{{}^{b^2}\!/_{2} - a^2}$.

1. Вариант 2 (март 2002)

1. $\pm\arccos\pi/6 + 2k\pi$, $\pm\pi/6 + 2n\pi/3$.
2. 3.
3. $2 < x < 4$.
4. $7+\sqrt{19}$.
5. $x = y = 0$, $y = -3x = -3\sqrt{13}$.
6. $2\arcsin\frac{1}{4\cos{}^{\alpha}\!/_{2}\cos{}^{\alpha}\!/_{4}}$.
7. $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 1$, $x = 1/y = 6^{\pm 3\sqrt{a(a-1)/2}}$.
8. $\sqrt{{}^{m^2}\!/_{2} - n^2}$.