Задачи вступительного экзамена по математике
на физическом факультете МГУ

Вариант 1 (март 2003)

1. Решить уравнение $\cos 3x$-2 $\sin 2x$-$\cos x$-$\sin x$-1=0.
2. Решить неравенство $7\log_3(2+x)^8<8\log_2(-x+1)^7\cdot\log_3 2$.
3. Решить неравенство $(4^x\text{-}2\cdot 2^x\text{-}3)\log_2 x\text{-}3\geqslant 4^{\frac{x+1}{2}}\text{-}4^x$.
4. Радиус вписанной окружности ΔABC равен 3, $AB = BC$, AC=$4\sqrt{3}$. Прямая AE пересекает высоту BD в точке E, а вписанную окружность – в точках M и N (M между A и E), ED=2. Найти EN.
5. Решить систему $\left\{\begin{array}{l}\frac{17}{2x^2+3y}+\frac{12}{3x^2-2y}=3\\ \frac{6}{3x^2-2y}+\frac{34}{2x^2+3y}=3\end{array}\right.$ и изобразить на координатной плоскости O ее решения.
6. Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$, периметр его равен 18, расстояние от центра вписанной окружности до одной из вершин равно $2\sqrt{42}/3$. Найти наименьшую сторону треугольника.
7. Для каждого допустимого значения a в уравнении $\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{a}-x}=a$ 1) найти число различных решений уравнения; 2) найти эти решения.
8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1||BB_1||CC_1$), объем которой равен 4, проведено сечение плоскостью AC_1B. В пирамиду $C_1AA_1B_1B$ вписан шар. Найти 1) площадь сечения AC_1B; 2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

Вариант 2 (март 2003)

1. Решить уравнение $\sin 3x$-2 $\sin 2x$+$\sin x$+$\cos x$-1=0.
2. Решить неравенство $6\log_7(3+x)^5>5\log_2(1\text{-}x)^6\cdot\log_7 2$.
3. Решить неравенство $(9^x\text{-}2\cdot 2^{x+1}\text{-}7)\log_3 x+7\geqslant 3^{2x}\text{-}2\cdot 9^{\frac{x+1}{2}}$.
4. В равнобедренную трапецию $ABCD$ ($BC||AD$) вписана окружность, касающаяся сторон BC и AD в точках E и F соответственно, AD=$2\sqrt{7}$, EF=4. Прямая DM пересекает отрезок EF в точке M, а вписанную окружность – в точках K и L (K между D и M), FM:ME=3. Найти KM.
5. Решить систему $\left\{\begin{array}{l}\frac{42}{5y^2-2x}-\frac{23}{2y^2+5x}=2\\ \frac{46}{2y^2+5x}+\frac{14}{5y^2-2x}=3\end{array}\right.$ и изобразить на координатной плоскости O ее решения.
6. Периметр треугольника равен 20, площадь его равна $10\sqrt{2}$, отрезок биссектрисы от одной из вершин до центра вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти наибольшую сторону треугольника.
7. Для каждого допустимого значения в уравнении $\sqrt{\sqrt{2a}-x}\text{-}2a+\sqrt{x}$=0 1) найти число различных решений уравнения; 2) найти эти решения.
8. В правильной треугольной призме $KLMK_1L_1M_1$ ($KK_1||LL_1||MM_1$) проведено сечение плоскостью KL_1M. Площадь боковой грани призмы равна $8\sqrt{3}/3$. В пирамиду $L_1KK_1M_1M$ вписан шар. Найти 1) объем данной призмы; 2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

Вариант 1 (март 2003)

1 (-1)$^{n+1}\pi/12+n\pi/2$, -$\pi/2+2n\pi$.

2 x<-2, -2<x<-0,5.

3 0<x ⩽0,5, x ⩾$\log_2 3$.

4 $(1+\sqrt{33})/2$.

5 (-2,3), (2,3).

6 5.

7 a=0, x=0; 1⩽ a ⩽$2^{2/3}$, $x = \frac{\sqrt{a}}{2}(1 \pm \sqrt{a\sqrt{a}(2-a\sqrt{a})}$. 0<$a$<1 и a>$2^{2/3}$ – решений нет, a=0 и a=$2^{2/3}$ – одно решение, 1⩽ <$2^{2/3}$ – два решения.

8. $\frac{5}{4\sqrt{3}}$, $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Вариант 2 (март 2003)

1 (-1)$^{n+1}\pi/12+n\pi/2$, $2n\pi$.

2 –1<x<1, x>1.

3 0<x ⩽$\log_3 7$, x ⩾3.

4 $(3+\sqrt{57})/4$.

5 (3,-2), (3,2).

6 9.

7 a=0, x=0; 0,5⩽ a ⩽$2^{-1/3}$, $x = \sqrt{\frac{a}{2}}(1 \pm 2\sqrt{a\sqrt{2a}(1-a\sqrt{2a}})$. 0<$a$<0,5 и a>$2^{-1/3}$ – решений нет, a=0 и a=$2^{-1/3}$ – одно решение, 0,5⩽ a<$2^{-1/3}$ – два решения.

8. 4, $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.