Задачи вступительного экзамена по математике на физический факультет МГУ

Вариант 5 (май 2002)

1. Решить уравнение $\frac{\log_2(4x-3)}{\log_3 x}=\frac{2}{\log_3 2}$.

2. Решить уравнение $\cos 8x\cdot\mathrm{ctg}\, x+2\sin^2 4x=\mathrm{ctg}\, x$.

3. Решить уравнение $4+\sqrt{x+9}=|x+5|$.

4. В ΔABC AB=14, BC=6, AC=10. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O. Найти OD.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^{x+1}\cdot\log_9 y-2^{2x}=2 \\ 9\cdot 2^x\cdot\log_{27} y-\log_3^2 y=9 \end{cases}$.

6. Окружность проходит через вершину B ΔABC, касается стороны AC в ее середине D и пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, AB:BC=3:2. Найти отношение площади ΔAMD к площади ΔDNC.

7. Для каждого значения a решить неравенство $(x^2+2x-a^2\text{-}4a\text{-}3)(\sin x+2x)>0$.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SC перпендикулярно к грани ABC, $\angle ACB$ – прямой, AC=1, BC=2, $SC=4\sqrt{5}/5$. Сфера касается плоскостей SCA, SCB и ABC, причем плоскости ABC она касается в точке, лежащей на отрезке AB. Найти: 1) радиус сферы; 2) радиус окружности, по которой пересекаются сфера и грань ASB.

Вариант 6 (май 2002)

1. Решить уравнение $\frac{\log_2(5x-4)}{\log_5 x}=\frac{2}{\log_5 2}$.

2. Решить уравнение $\cos 4x\cdot\ \mathrm{tg}\, x+2\sin^2 2x-=\mathrm{tg}\, x$.

3. Решить уравнение $5+2\sqrt{x+13}=|x+8|$.

4. Биссектрисы KA и LB ΔKLM пересекаются в точке O, KL=8, LM=10, KM=12. Найти OA.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3^{x+1}\cdot\log_8 y-2\cdot 3^{2x}=1 \\ 5\cdot 3^x\cdot\log_2 y-8\cdot\log_4^2 y=-3 \end{cases}$.

6. Медиана KN ΔKLM является хордой окружности, касающейся стороны LM в точке N и пересекающей стороны KL и KM в точках A и B соответственно, KL:KM=3:4. Найти отношение площади ΔALN к площади ΔBMN.

7. Для каждого значения a решить неравенство $(x^2\text{-}2x-a^2+2a)(\sin x+\frac{x}{2})<0$.

8. В треугольной пирамиде $SKLM$ углы SMK, SML и KML – прямые, $KM=2\sqrt{5}$, $ML=\sqrt{5}$, SM=4. Сфера касается граней двугранного угла с ребром SM, а плоскости KLM она касается в точке, лежащей на отрезке KL. Найти: 1) радиус сферы; 2) радиус окружности, по которой пересекаются сфера и грань KSL.

ОТВЕТЫ

Вариант 5 (май 2002)

1. 3.
2. $\pm\frac{\pi}{4}+n\pi$, $\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.
3. –9, $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.
4. $\sqrt{7}$.
5. x=1, y=27.
6. $\frac{4}{9}$.
7. При a<-3 и a>-1: x>-1+|a+2| и -1-|a+2|<x<0;
при -3⩽ a<-2 и −2<a ⩽-1: x>0 и −1-|a+2|<x<-1+|a+2|; при a=-2: x>0.
8. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3\sqrt{5}}$.

Вариант 6 (май 2002)

1. 4.
2. $n\pi$, $\frac{\pi}{4}+n\pi$,$n\in\mathbf{Z}$.
3. −13, -1+2$\sqrt{11}$.
4. 2$\sqrt{2}$.
5. x=0, y=8.
6. $\frac{16}{9}$.
7. При a<0 и a>2: 0<x<1+|a-1| и x<1-|a-1|;
при 0⩽ a<1 и 1<a ⩽2: x<0 и 1-|a-1|<x<1+|a-1|; при a=1: x<0.
8. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$, $\frac{4}{3}$.