Задачи вступительного экзамена по математике на физический факультет МГУ

Вариант 5 (май 2003)

1. Решить уравнение

$$2\sin(6\cos 3x\cdot\cos 2x\text{-}3\cos 3x)=1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^x\cdot 7^{2y}=27 \\ 5^y\cdot 4^{x+1}=32 \end{cases}.$$

3. Решить неравенство $[\log_5(x^2\text{-}5x+6)]^{-1}<\log_{20}5$.

4. В треугольнике KLM $KL=m$, $LM=k$, $MK=l$. Биссектрисы KA и MB пересекаются в точке O, диагонали четырехугольника $AOBL$ пересекаются в точке C. Найти $BC : CA$.

5. Решить неравенство $\sqrt{12\,x^2+42x+1}+|2x^2+7x|\geqslant 9$.

6. Окружность проходит через вершину B угла ABC и отсекает на сторонах угла равные отрезки BA и BC, $\angle ABC=\alpha$. Другая окружность касается отрезков BA и BC в точках M и N соответственно, а также касается первой окружности. Найти $MN : AB$.

7. Для каждого допустимого значения a решить неравенство $\sqrt{7-\log_a x^2}>(\log_a\mathrm{x})(1\text{-}2\log_{|x|}a)$.

8. Сфера касается плоскости ABC основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ в точке C, а также касается бокового ребра SA в точке M, $SM : MA=1 : 2$, $AB=a$. Найти радиус сферы.

Вариант 6 (май 2003)

1. Решить уравнение

$$2\cos(8\sin 3x\cdot\cos 2x-4\sin 5x)+1=0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{2y+2}\cdot 13^x=64 \\ 5^{3x}\cdot 9^{4y}=81 \end{cases}.$$

3. Решить неравенство $[\log_2(x^2+7x+12)]^{-1}<\log_{56}2$.

4. В треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Биссектриса AM пересекает биссектрису BN пересекаются в точке K. Отрезки MN и CK пересекаются в точке L. Найти $ML : LN$.

5. Решить неравенство

$$7\text{-}|2x^2\text{-}7x|\leqslant\sqrt{4-8\,x^2+28x}.$$

6. Около равнобедренного ΔKLM ($KL=LM$) описана окружность, $\angle KLM=\beta$. Другая окружность касается сторон KL и LM в точках A и B соответственно, а также касается первой окружности. Найти отношение площади ΔALB к площади ΔKLM.

7. Для каждого допустимого значения b решить неравенство $\sqrt{7+\log_b x^2}+(\log_b|\mathrm{x}|)(1+2\log_x b)>0$.

8. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ (S - вершина) $KL=b$. Сфера касается плоскости KLM основания пирамиды в точке L, а также касается бокового ребра SK в точке A, $SA : AK=2 : 1$, $AB=a$. Найти радиус сферы.

Вариант 5 (май 2003)

1. $\pm\arccos\pi/18+2n\pi$, $\pm\arccos 5\pi/18+2n\pi$.
2. x=1,5; y=0.
3. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}<x<2$; $3<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2}$; $x<$-2; $x>7$.
4. $\frac{m+l}{k+l}$.
5. $x \leqslant$-4; $x \geqslant$0,5.
6. $(1+\sin\alpha/2)^{-1}$.
7. При $0<a<1$: $a^3<x<1$, $x>1$; при $a>1$: $0<x<1$, $1<x<a^3$.
8. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}}$.

Вариант 6 (май 2003)

1 $\pm[(-1)^{n+1}\arcsin\pi/6+n\pi]$.
2. x=0; y=0,5.
3. $\frac{-7-\sqrt{5}}{2}<x<$-4; -3$<x<\frac{-7+\sqrt{5}}{2}$; $x<$-11; $x>4$.
4. $\frac{a+c}{b+c}$.
5. 0,5$\leqslant x \leqslant$3.
6. $(1+\sin\beta/2)^{-2}$.
7. При $0<b<1$: $0<x<1$, $1<x<b^{-3}$, при $b>1$: $b^{-3}<x<1$, $x>1$.
8. $\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{26}}$.