Билет 1.

1. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ равен $+\infty$ при $x \to +\infty$.
   Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения двух функций.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен b в точке a справа.
   Докажите, что если предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ равен b, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to +0} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

Билет 2.

1. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ сформулируйте определение того, что $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to \infty$.
   Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах для функций.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен b при $x \to +\infty$.
   Укажите и обоснуйте, какая из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет более высокий порядок роста при $x \to 0$: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$.

Билет 3.

1. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ сформулируйте определение того, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок роста при $x \to -\infty$.
   Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы двух функций.

2. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.
   Докажите, что если предел функции $f(x)$ в точке a равен b, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция в точке a.

3. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{n}$.

Билет 4.

1. Сформулируйте определение ограниченной числовой последовательности.
   Сформулируйте и докажите теорему о пределе суммы двух функций.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $+\infty$ в точке a справа.
   Пусть функция $\alpha(x)$ определена на множестве X и пусть a — предельная точка X. Докажите, что $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$ при $x \to a$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Билет 5.

1. Сформулируйте определение функции, непрерывной слева в точке a.
   Сформулируйте и докажите теорему о пределе суммы двух последовательностей.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $-\infty$ в точке a справа.
   Сформулируйте и докажите утверждение о единственности предела последовательности.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(\ln(x+1)-\ln x)$.

Билет 6.

1. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ сформулируйте определение того, что $f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$, при $x\to\infty$.
   Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения двух последовательностей.

2. Сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на множестве X.
   Используя свойства символа «o-малое», запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x)=o(1)$ или $\alpha(x)=o\big((x-a)^n\big)$ при $x\to a$ (n — натуральное число): $\alpha(x)=(x-1)\,o((x-1)^2+o(x-1)),\ \ x\to 1$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

Билет 7.

1. Сформулируйте определение функции $f(x)$ строго монотонной на множестве X.
   Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности произведения двух функций.

2. Сформулируйте определение числовой последовательности, не являющейся бесконечно большой.
   Используя определение (по Коши) бесконечно большой функции, докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)=\infty$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}$.

Билет 8.

1. Сформулируйте определение нижней грани множества вещественных чисел.
   Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности разности двух функций.

2. Сформулируйте определение (по Коши) функции $f(x)$, не являющейся бесконечно большой при $x\to\infty$.
   Используя определение (по Коши) соответствующего предела, докажите, что $\lim\limits_{x\to-0}(1/x)=-\infty$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, $\alpha\neq\beta$.

Билет 9.

1. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ равен $+\infty$ в точке a справа.
   Сформулируйте и, используя теорему о прохождении непрерывной функции через нуль, докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $-\infty$ при $x \to +\infty$.
   Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке a. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} c\, f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, где $c = \text{const}$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Билет 10.

1. Сформулируйте определение (по Коши) функции $f(x)$, бесконечно большой при $x \to -\infty$.
   Сформулируйте и докажите теорему о пределе разности двух последовательностей.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $+\infty$ при $x \to \infty$.
   Можно ли утверждать, что квадрат разрывной в некоторой точке функции есть функция, разрывная в этой точке? Ответ обоснуйте.

3. Исследуйте вопрос о сходимости последовательности $x_n = \dfrac{n^\alpha - 1}{2n^\alpha + n + 1}$ в зависимости от параметра α.

Билет 11.

1. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ сформулируйте определение того, что $f(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем $g(x)$, в точке a.
   Сформулируйте и докажите теорему о пределе разности двух функций.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $+\infty$ в точке a.
   Напишите асимптотическое разложение функции $e^{1/\sqrt{x}} - 1$, $x > 0$ при $x \to \infty$ с остаточным членом вида $o(1/x^\alpha)$, где $\alpha \geqslant 0$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Билет 12.

1. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ сформулируйте определение того, что $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка в точке a справа.
   Сформулируйте и докажите теорему о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке.

2. Сформулируйте определение функции, неограниченной снизу на множестве X.
   Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки a. Докажите, что из существования предела в точке a произведения $f(x) \cdot g(x)$ не следует существование пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

Билет 13.

1. Сформулируйте определение функции $f(x)$, бесконечно малой при $x\to+\infty$.
Сформулируйте и докажите теорему о двух милиционерах (полицейских) для последовательностей.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $-\infty$ в точке a слева.
Докажите, что последовательность $\left\{\left(1+(-1)^n\right)n\right\}$ неограничена, однако не является бесконечно большой.

3. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Билет 14.

1. Сформулируйте определение функции, непрерывной в точке a.
Сформулируйте и докажите теорему о двух милиционерах (полицейских) для функций.

2. Сформулируйте определение функции $f(x)$, не являющейся бесконечно малой при $x\to\infty$.
Пусть функция $\alpha(x)$ определена на множестве X и пусть a — предельная точка X. Докажите, что $o(\alpha)+o(\alpha)=o(\alpha)$ при $x\to a$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$.

Билет 15.

1. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ сформулируйте определение того, что $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to-\infty$.
Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности частного двух функций.

2. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $-\infty$ в точке a.
Пусть $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$. Докажите, что
$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & \text{если } n>m,\\ a_0/b_0, & \text{если } n=m,\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

Билет 16.

1. Сформулируйте определение того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ равен $+\infty$ при $x\to-\infty$.
Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах для последовательностей.

2. Сформулируйте определение (по Коши) функции $f(x)$, не являющейся бесконечно большой в точке a.
   Докажите, что если бесконечно малая в некоторой точке функция $f(x) = c = \mathrm{const}$, то $c = 0$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

Билет 17.

1. Сформулируйте определение функции $f(x)$ невозрастающей на множестве X.
   Сформулируйте и докажите теорему о первом замечательном пределе.

2. Сформулируйте определение числовой последовательности, не являющейся бесконечно малой.
   Докажите, что $2\,x^2 + x^3 = O(x^2)$ при $x \to 0$.

3. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$, где $m, n \in \mathbb{N}$.