Вопросы и задания к коллоквиуму по математическому анализу «Предел последовательности и предел функции» Первый поток. Осень 2013

2 ноября 2013 г.

1 Определения

Сформулируйте определение:

1. ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел;
2. ограниченного множества вещественных чисел;
3. верхней (нижней) грани множества вещественных чисел;
4. окрестности данной точки;
5. ε-окрестности данной точки;
6. проколотой ε-окрестности данной точки;
7. функции, ограниченной сверху (снизу) на множестве X;
8. функции, ограниченной на множестве X;
9. верхней (нижней) грани функции на множестве X;
10. предельной точки числового множества;
11. предела (по Коши) функции $f(x)$:
    а) в точке a;
    б) в точке a справа (слева);
    в) при $x \to \infty$;
    г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);
12. числовой последовательности;
13. ограниченной числовой последовательности;
14. предела числовой последовательности;
15. сходящейся числовой последовательности;
16. функции $f(x)$, бесконечно малой:
    а) в точке a;
    б) в точке a справа (слева);
    в) при $x \to \infty$;
    г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);
17. бесконечно малой числовой последовательности;
18. (по Коши) функции $f(x)$, бесконечно большой:
    а) в точке a;
    б) в точке a справа (слева);
    в) при $x \to \infty$;
    г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);
19. бесконечно большой числовой последовательности;

20. того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ равен $+\infty$:

а) в точке a;

б) в точке a справа (слева);

в) при $x \to \infty$;

г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);

21. того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ равен $-\infty$:

а) в точке a;

б) в точке a справа (слева);

в) при $x \to \infty$;

г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);

Для функций $f(x)$ и $g(x)$ сформулируйте определение того, что:

22. $f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$:

а) в точке a;

б) в точке a справа (слева);

в) при $x \to \infty$;

г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);

23. $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка:

а) в точке a;

б) в точке a справа (слева);

в) при $x \to \infty$;

г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);

24. $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми:

а) в точке a;

б) в точке a справа (слева);

в) при $x \to \infty$;

г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);

25. $f(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем $g(x)$:

а) в точке a;

б) в точке a справа (слева);

в) при $x \to \infty$;

г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);

26. $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок роста:

а) в точке a;

б) в точке a справа (слева);

в) при $x \to \infty$;

г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).

27. Сформулируйте определение функции $f(x)$:

а) возрастающей на множестве X;

б) убывающей на множестве X;

в) строго монотонной на множестве X;

г) невозрастающей на множестве X;

д) неубывающей на множестве X;

е) монотонной на множестве X.

28. Сформулируйте определение монотонной числовой последовательности.

Сформулируйте определение:

29. функции, непрерывной в точке;
30. функции, непрерывной справа (слева) в точке;
31. точки разрыва функции $f(x)$;
32. точки устранимого разрыва функции $f(x)$;
33. точки разрыва первого рода функции $f(x)$;
34. точки разрыва второго рода функции $f(x)$;
35. функции, непрерывной на промежутке X.

2 Задания на построение «отрицаний определений»

Сформулируйте определение:

1. неограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел;
2. неограниченного множества вещественных чисел;
3. функции, неограниченной сверху (снизу) на множестве X;
4. функции, неограниченной на множестве X;
5. того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен b:
   а) в точке a;
   б) в точке a справа (слева);
   в) при $x \to \infty$;
   г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);
6. неограниченной числовой последовательности;
7. того, что предел числовой последовательности x_n не равен a;
8. расходящейся числовой последовательности;
9. функции $f(x)$, не являющейся бесконечно малой:
   а) в точке a;
   б) в точке a справа (слева);
   в) при $x \to \infty$;
   г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);
10. числовой последовательности, не являющейся бесконечно малой;
11. (по Коши) функции $f(x)$, не являющейся бесконечно большой:
   а) в точке a;
   б) в точке a справа (слева);
   в) при $x \to \infty$;
   г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);
12. числовой последовательности, не являющейся бесконечно большой;
13. того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $+\infty$:
   а) в точке a;
   б) в точке a справа (слева);
   в) при $x \to \infty$;
   г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$);
14. того, что предел (по Коши) функции $f(x)$ не равен $-\infty$:
   а) в точке a;
   б) в точке a справа (слева);
   в) при $x \to \infty$;
   г) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).

3 Основные теоремы и формулы

Сформулируйте теорему:

1. о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке;
2. о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций (двух последовательностей);
3. о предельном переходе в неравенствах:

   а) для функций; б) для последовательностей;

4. о двух милиционерах (полицейских):

   а) для функций; б) для последовательностей;

5. о пределе монотонной ограниченной функции $f(x)$:

   а) при $x \to +\infty$; в) при $x \to a+0$;

   б) при $x \to -\infty$; г) при $x \to a-0$;

6. о пределе монотонной ограниченной последовательности;
7. о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух функций;
8. о непрерывности сложной функции;
9. о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение;
10. о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции;
11. о первом замечательном пределе;
12. о втором замечательном пределе.
13. Напишите асимптотическую формулу (при $x \to 0$) для функции:

    а) $\sin x$; в) $\cos x$; д) a^x; ж) $\operatorname{sh} x$; и) $\operatorname{ch} x$.

    б) $\operatorname{tg} x$; г) $\ln(1+x)$; е) $(1+x)^\alpha$; з) $\operatorname{th} x$;

4 Задания на доказательство основных теорем

1. Сформулируйте и докажите теорему о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке.
2. Сформулируйте и докажите теорему о пределе:

   а) суммы;

   б) разности;

   в) произведения;

   двух функций (двух последовательностей).
3. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах:

   а) для функций;

   б) для последовательностей.
4. Сформулируйте и докажите теорему о двух милиционерах (полицейских):

   а) для функций;

   б) для последовательностей.
5. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух функций.
6. Сформулируйте и, используя теорему о прохождении непрерывной функции через нуль, докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.
7. Сформулируйте и докажите теорему о первом замечательном пределе.

5 Полный перечень теоретических заданий

1. Приведите примеры ограниченного и неограниченного множеств вещественных чисел.
2. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$. Укажите множество всех предельных точек промежутка X.
3. Приведите пример неограниченного множества, не имеющего (конечных) предельных точек.

Сформулируйте и докажите утверждение:

4. о единственности предела функции;
5. об ограниченности функции, имеющей предел в данной точке.
6. Используя определение предела функции по Коши, докажите, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где:

   а) $f(x) = b = \text{const}\ \forall x \in \mathbb{R}$; в)

   б) $f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a, \\ c \neq b, & \text{если } x = a; \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a, \\ \varnothing, & \text{если } x = a. \end{cases}$
7. Используя определение предела функции по Коши, докажите, что:

   а) $\lim\limits_{x\to a} x = a$.
8. Используя неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$, докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.
9. Пусть $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Используя определения односторонних пределов функции по Коши, докажите, что:

   а) $f(n-0) = n-1$; б) $f(n+0) = n$.
10. **Сформулируйте и докажите теорему о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке.**
11. Существует ли $\lim\limits_{x\to 1} x\,\mathrm{sign}(x-1)$? Обоснуйте ответ.
12. Используя определение (по Коши) соответствующего предела, докажите, что:

   а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1/x) = 0$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1/x) = 0$.

Сформулируйте и докажите утверждение:

13. о единственности предела последовательности;
14. об ограниченности сходящейся последовательности.
15. Используя определение предела числовой последовательности, докажите, что:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}8)^n = 0$;
16. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Используя определение предела числовой последовательности, докажите, что:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$; б) $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+p} = a$.

17. Является ли бесконечно малой в точке $x = 0$ функция:

а) $\sin x$;

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

в) $\operatorname{sign} x$.

18. Приведите пример функции $f(x)$, бесконечно малой при $x \to \infty$.

19. Приведите пример бесконечно малой числовой последовательности.

20. Используя определение (по Коши) бесконечно большой функции, докажите, что

$$\lim_{x \to 0} 1/x = \infty.$$

21. Используя определение (по Коши) соответствующего предела, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x \to +0} (1/x) = +\infty$;

б) $\lim\limits_{x \to -0} (1/x) = -\infty$.

22. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно большой:

а) $a_n = \sqrt{n}$;

б) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

Докажите, что:

23. если $f(x)$ — бесконечно большая в точке a функция, то в некоторой проколотой окрестности точки a определена функция $g(x) = 1/f(x)$ и она является бесконечно малой в точке a;

24. если $f(x)$ — бесконечно малая в точке a функция и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то $g(x) = 1/f(x)$ — бесконечно большая функция в точке a;

25. если бесконечно малая в некоторой точке функция $f(x) = c = \mathrm{const}$, то $c = 0$;

26. если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то последовательность $\{y_n\} = 1/\{x_n\}$ определена, начиная с некоторого номера n, и является бесконечно малой;

27. если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{y_n\} = 1/\{x_n\}$ — бесконечно большая;

28. любая бесконечно большая последовательность является неограниченной;

29. последовательность $\big\{\big(1 + (-1)^n\big)\, n\big\}$ неограничена, однако не является бесконечно большой;

30. сумма (разность) двух бесконечно малых в точке a функций является бесконечно малой в точке a функцией;

31. сумма бесконечно малой в точке a функции и ограниченной в окрестности точки a функции является ограниченной в некоторой окрестности точки a функцией;

32. произведение бесконечно малой в точке a функции на ограниченную в окрестности точки a функцию есть бесконечно малая в точке a функция.

33. Докажите, что $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$. Верно ли, что $o(x) = x^2$ при $x \to 0$?

34. Докажите, что:

а) $2\,x^2 + x^3 = O(x^2)$ при $x \to 0$;

б) $2\,x^2 + x^3 \sim 2\,x^2$ при $x \to 0$.

35. Пусть функция $\alpha(x)$ определена на множестве X и пусть a — предельная точка X. Докажите, что при $x \to a$:

а) $o(\alpha) \pm o(\alpha) = o(\alpha)$;

б) $o(c\,\alpha) = o(\alpha),\ \forall c = \mathrm{const}$;

в) $c\,o(\alpha) = o(\alpha),\ \forall c = \mathrm{const}$;

г) $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$;

д) $o(\alpha + o(\alpha)) = o(\alpha)$;

е) $(o(\alpha))^k = o(\alpha^k),\ \forall k > 0$;

ж) $\alpha^k\,o(\alpha) = o(\alpha^{k+1}),\ \forall k \in \mathbb{R}$.

36. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые в точке a функции. Докажите, что:

а) $\alpha \cdot \beta = o(\alpha)$, $\alpha \cdot \beta = o(\beta)$ при $x \to a$;

б) если $\alpha \sim \beta$ при $x \to a$, то $\alpha - \beta = o(\alpha)$ и $\alpha - \beta = o(\beta)$ при $x \to a$.

37. Используя свойства символа «o-малое», запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x) = o(1)$ или $\alpha(x) = o\big((x-a)^n\big)$ при $x \to a$ (n — натуральное число):

а) $\alpha(x) = o(-5x + x^2 - x^3 + o(-5x + x^2 - x^3)),\ \ x \to 0$;

б) $\alpha(x) = (x-1)\,o((x-1)^2 + o(x-1)),\ \ x \to 1$;

в) $\alpha(x) = \dfrac{1}{3x}\,o(5x + x^2),\ \ x \to 0$;

г) $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2}\,o(2x^4 + o(x^4 + 2x^2)),\ \ x \to 0$;

д) $\alpha(x) = \dfrac{o\left(2\,(x+2)^3\right)}{(x+2)^2} + \dfrac{o\left(4\,(x+2)^5\right)}{(x+2)^4},\ \ x \to -2$.

38. Используя свойства символа «o-малое», запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x) = o(1)$ или $\alpha(x) = o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ при $x \to \infty$ (n — натуральное число):

а) $\alpha(x) = o\left(\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

б) $\alpha(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$;

в) $\alpha(x) = x^2 \cdot o\left(\dfrac{1}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$;

г) $\alpha(x) = x \cdot \left(o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$;

д) $\alpha(x) = 5\,x \cdot o\left(\dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

39. Укажите и обоснуйте, какая из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет более высокий порядок роста при $x \to 0$:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Докажите, что:

40. если предел функции $f(x)$ в точке a (при $x \to \infty$) равен b, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция в точке a (при $x \to \infty$);

41. если $f(x) = b + \alpha(x)$, где b — число, а $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция в точке a (при $x \to \infty$), то предел функции $f(x)$ в точке a (при $x \to \infty$) равен b.

42. Сформулируйте и докажите теорему о пределе:

а) суммы;

б) разности;

в) произведения;

двух функций (двух последовательностей).

43. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки a и пусть $f(x)$ имеет предел в точке a, а $g(x)$ не имеет предела в этой точке. Что можно сказать о существовании пределов в точке a:

а) суммы $f(x)+g(x)$; б) разности $f(x)-g(x)$.

Ответ обоснуйте.

44. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки a. Докажите, что из существования предела в точке a:

а) суммы $f(x)+g(x)$; в) произведения $f(x)\cdot g(x)$;

б) разности $f(x)-g(x)$; г) частного $f(x)/g(x)$ $(g(x)\neq 0)$

не следует существование пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a.

45. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке a. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} c\,f(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где $c = \mathrm{const}$.

46. Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m и пусть $Q_m(a)\neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

47. Пусть $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m,\\ a_0/b_0, & \text{если } n = m,\\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

48. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах:

а) для функций; б) для последовательностей.

49. Пусть функция $f(x)$ с областью определения X удовлетворяет условию: $\forall x\in X \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > c$, где $c = \mathrm{const}$, и пусть существует:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Докажите, что из данных условий не следует, что:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) > c$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) > c$.

50. Сформулируйте и докажите теорему о двух милиционерах (полицейских):

а) для функций; б) для последовательностей.

51. Пусть, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant y_n$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

52. Пусть $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Является ли функция $f(x)$:

а) монотонной на $\mathbb{R}$; б) строго монотонной на $\mathbb{R}$?

53. Используя метод математической индукции, докажите неравенство Бернулли:

$$\forall n\in\mathbb{N} \text{ и } \forall x\in[-1,+\infty) \Rightarrow (1+x)^n \geqslant 1 + n\,x.$$

54. Сформулируйте и докажите утверждение об устойчивости знака непрерывной функции.

55. Используя утверждение об устойчивости знака непрерывной функции, докажите, что:

   а) если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, и в любой окрестности точки a найдутся точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, то $f(a) = 0$.

56. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a. Что можно сказать о непрерывности функции $|f(x)|$ в точке a? Ответ обоснуйте.

57. Пусть функция $|f(x)|$ непрерывна в точке a. Что можно сказать о непрерывности функции $f(x)$ в точке a? Ответ обоснуйте.

58. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной в некоторой точке функции есть функция, разрывная в этой точке? Ответ обоснуйте.

59. Пусть $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Исследуйте на одностороннюю непрерывность функцию $f(x)$:

   а) в точках $x = n$, где $n \in \mathbb{Z}$;
   б) в точках $x = a$, где $a \notin \mathbb{Z}$.

60. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке a слева и справа, то она непрерывна в точке a.

61. Приведите пример функции, которая имеет в точке a:

   а) устранимый разрыв;
   б) разрыв первого рода;
   в) разрыв второго рода.

62. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции:

   а) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$;
   б) $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x.

63. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух функций.

64. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности точки a и пусть $f(x)$ непрерывна в точке a, а $g(x)$ — разрывна в этой точке. Что можно сказать о непрерывности в точке a:

   а) суммы $f(x) + g(x)$;
   б) разности $f(x) - g(x)$.

   Ответ обоснуйте.

65. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности точки a. Докажите, что из непрерывности в точке a:

   а) суммы $f(x) + g(x)$;
   б) разности $f(x) - g(x)$;
   в) произведения $f(x) \cdot g(x)$;
   г) частного $f(x)/g(x)$ $(g(x) \neq 0)$

   не следует непрерывность функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a.

66. Сформулируйте и, используя теорему о прохождении непрерывной функции через нуль, докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

67. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a; b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ и уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на (a, b). Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a; b]$.

68. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, и $\exists c \in (f(a), f(b))$ такое, что уравнение $f(x) = c$ не имеет корней на (a, b). Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a;b]$.

69. Существует ли обратная функция к функции $f(x)$:

   а) $f(x) = x^2$, $D_f = [0, +\infty)$; б) $f(x) = x^2$, $D_f = (-\infty, +\infty)$.

70. Докажите непрерывность функции:

   а) $y = \sin x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; д) $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

   б) $y = \cos x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$;

71. Пусть $f(x) = \sin x$, $D_f = [-\pi/2, +\pi/2]$. Докажите существование, монотонность и непрерывность функции $f^{-1}(y) =: \arcsin y$, обратной к функции $y = f(x)$.

72. Пусть $f(x) = \cos x$, $D_f = [0, \pi]$. Докажите существование, монотонность и непрерывность функции $f^{-1}(y) =: \arccos y$, обратной к функции $y = f(x)$.

73. Пусть $\alpha = \text{const} > 0$. Докажите непрерывность функции $y = x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$.

74. Сформулируйте и докажите теорему о первом замечательном пределе.

75. Выведите асимптотическую формулу (при $x \to 0$) для функции:

   а) $\sin x$; б) $\operatorname{tg} x$.

76. Не используя асимптотические формулы, докажите, что:

   а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

77. Выведите асимптотическую формулу (при $x \to 0$) для функции:

   а) $\ln(1+x)$; б) $\operatorname{sh} x$; в) $\operatorname{th} x$.

78. Напишите асимптотическое разложение функции:

   а) $\sin^2(5\sqrt{x} + x)$, $x > 0$; в) $\ln(1 - x^2 + x)$; д) $\ln(e^x + \sqrt{x})$, $x > 0$.

   б) $\cos(4x^2 + x)$; г) $\ln(\cos 2x)$;

   при $x \to 0$ с остаточным членом вида $o(x^\alpha)$, где $\alpha \geqslant 0$.

79. Напишите асимптотическое разложение функции:

   а) $\sqrt{x^2 + x} - x$; в) $\ln \cos(2/x)$;

   б) $\sqrt[3]{x^3 + x} - x$; г) $e^{1/\sqrt{x}} - 1$, $x > 0$.

   при $x \to \infty$ с остаточным членом вида $o(1/x^\alpha)$, где $\alpha \geqslant 0$.

80. Найдите все точки разрыва функции $f(x)$ и определите их тип:

   а) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; б) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

6 Вычислительные задачи

1. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$;

   б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

   г) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

   д) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$;

   е) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

2. Исследуйте вопрос о сходимости последовательности $x_n = \dfrac{n^\alpha - 1}{2n^\alpha + n + 1}$ в зависимости от параметра α.

3. Найдите предел последовательности:

   а) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n}$;

   б) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

4. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$;

   б) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}$;

   г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$;

   д) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$;

   е) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

   ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, $\alpha\neq\beta$;

   з) $\lim\limits_{n\to \infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$, $x>0$;

   и) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\log_x 2$;

   к) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$;

   л) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

5. Вычислите предел, не используя правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to +0} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

   б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.