Ряды Тейлора

1

~~Опр~~ Пусть ф-я $f(x) \in C^{\infty}$ (окр т. a)

Опр Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}_{c_k} (x-a)^k =: \mathcal{F}(x)$

наз рядом Тейлора ф-ии $f(x)$ ее с центром в т. a

Зам При $a=0$ Ряд Тейлора = = ряд Маклорена

Вопрос: $\mathcal{F}(x) \overset{?}{=} f(x)$

① $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$ $\qquad \frac{1}{x} = t$

1° $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} =$

$= \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0$

2° Док, что $f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$

При $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = e^{-1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$

$f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6} e^{-1/x^2} =$

$$= \frac{1}{x^6}(4-6x^2)e^{-1/x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{x^9} P_4(x) e^{-1/x^2}$$

— " —

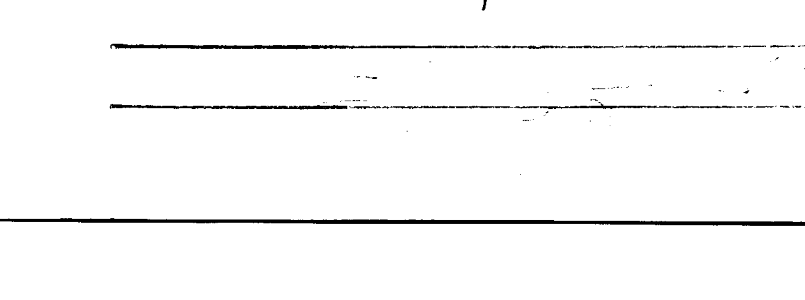
$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{3n}} P_{2(n-1)}(x) e^{-1/x^2}$$

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - \overset{=0}{f^{(n)}(0)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{3n+1}} P_{2(n-1)}(x) e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} P_{2(n-1)}(x)}_{=:c} \cdot \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{t^{3n+1}}{e^{t^2}}}_{\to 0} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{=0}{f^{(k)}(0)}}{k!} x^k \equiv 0$$



3

Зам как, что Маклорен

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{мн-н Тейлора}} + \underbrace{R_{n+1}(x)}_{\text{ост член}}$$

$$R_{n+1}(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}}_{\text{огр в окр т. } x=0 \quad |\,| < C_{n+1}} x^{n+1}, \quad \xi_{n+1} \in (0, x)$$

$\Rightarrow R_{n+1}(x) = \underline{\underline{O}}(x^{k+1}) \to 0, \; x \to 0$

Но $R_{n+1}(x)$ может $\not\to 0$, $n \to \infty$ и $\forall$фикс $x \neq 0$

т.к. $\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$ могут $\to \infty$

Пусть $f(x): D_f \supseteq \Omega_\delta(a) := (a-\delta, a+\delta)$

Теор Если 1) $f(x) \in C^\infty(\Omega_\delta(a))$

2) $\exists M, A > 0: \forall x \in \Omega_\delta(a)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M \cdot A^n$

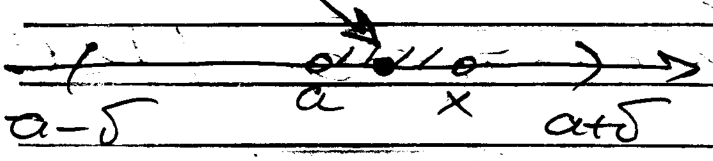
то $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ сх-ся равн-но

к ф-ии $f(x)$ на $\Omega_\delta(a)$

Δ $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{S_n(x)} + R_{n+1}(x)$ (4)

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}\underbrace{(x-a)}_{\delta}^{n+1}$$

Т.к. $\xi_{n+1} \in (a, x) \subset \Omega_\delta(a) \Rightarrow$



$|x-a|<\delta$

2) $\Rightarrow |R_{n+1}(x)| \le \frac{MA^{n+1}}{(n+1)!}\delta^{n+1} =$

$= \underbrace{M\frac{(A\delta)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\uparrow} \to 0,\ n\to\infty$.

не зав от $x \Rightarrow R_{n+1}(x) \rightrightarrows 0,\ n\to\infty$

$R_{n+1}(x) = f(x) - S_n(x)$

~~$\Rightarrow S_n(x) \rightrightarrows f(x)$~~

$\Rightarrow S_n(x) \rightrightarrows f(x),\ n\to\infty$ на $\Omega_\delta(a)$ ▲

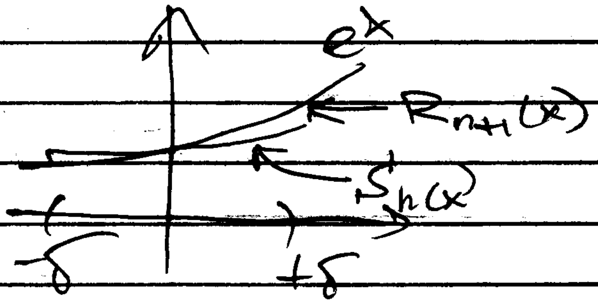
② $f(x) = e^x$

Зам, что $\forall x \in (-\delta, +\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f^{(n)}(x)| = e^x < e^\delta =: M = M\cdot \underset{A}{1}^n$

Тогда по теор 1 ~~на~~ $\forall$ пр-ка

$$X=(-\delta,+\delta) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(k)}(0)}^{=1}}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \overset{X}{\rightrightarrows} e^x,\ n\to\infty$$



но $S_n(x) \not\rightrightarrows e^x$ на $(-\infty,+\infty)$

Тем не менее, $\forall x\in(-\infty,+\infty) \Rightarrow$

$S_n(x)\to e^x,\ n\to\infty$

т.к. $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0: x\in(-\delta,+\delta)$

③ $f(x)=e^{3x}$

Зам, что $\forall x\in(-\delta,+\delta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(x)| = 3^n e^{3x} = 3^n \overbrace{e^{3\delta}}^{M} = M\cdot \overbrace{3^n}^{A}$$

Тогда в силу теор 1

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^k \quad \forall x\in(-\infty,+\infty),$$

причём $S_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на $\forall X=(-\delta,+\delta)$

4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad f(0)=1$

$f'(x) = \frac{+1}{(1-x)^2}$ $\quad f'(0)=1$

$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ $\quad f^{(k)}(0)=k!$

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k + R_{n+1}(x)$

I способ

1) Пусть $x \in (-1, 0)$ $\qquad \xi_{n+1} \in (x, 0) < 0$

Лагранж: $|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| =$

$= \left| \frac{\cancel{(n+1)!}\, x^{n+1}}{\cancel{(n+1)!}\,(1-\xi)^{n+2}} \right| < |x|^{n+1} \to 0, \ n \to \infty$

2) Пусть $x \in (0, 1)$ $\qquad \xi_{n+1} \in (0, x) > 0.$

Коши: $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} x \cdot (x-\xi)^n =$

$= \frac{\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}\, x (x-\xi)^n}{\cancel{n!}\,(1-\xi)^{n+2}} = \frac{(n+1)x}{(1-\xi)^2} \left(\frac{x-\xi}{1-\xi}\right)^n$

$0 \le$ — 0 — ξ — x — 1 $\to$

$$0 \le \frac{x-\xi}{1-\xi} = \frac{x-1+(1-\xi)}{(1-\xi)} = 1 - \frac{1-x}{1-\xi} \le$$

$$\le 1 - \frac{1-x}{1} = x$$

$$\Rightarrow |R_{n+1}(x)| < \frac{\overset{\to\infty}{(n+1)x}}{(1-x)^2}\, \overset{\to 0 \text{ быстрее!}}{x^n} \to 0,\ n\to\infty$$

Т.о. $S_n(x) \to \frac{1}{1-x}$ $\forall x \in (-1,+1)$

Зап $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

На $\forall X = [-\delta, +\delta] \subset (-1,+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^k| < \delta^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \delta^k$ — сх-ся $\Rightarrow$ (не зав от)

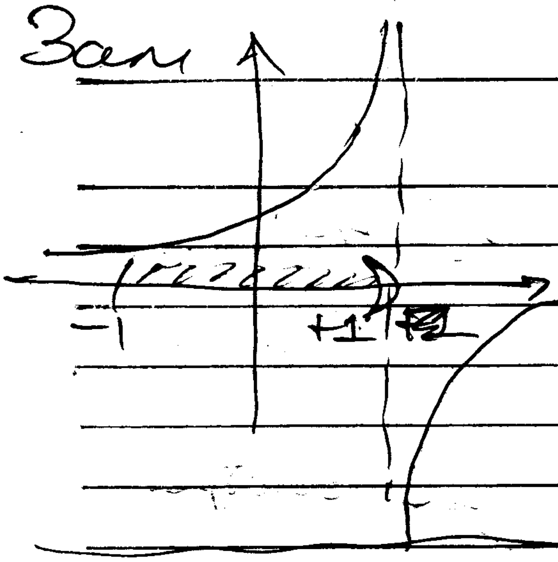
$\Rightarrow$ (по теор пр Вей-са) $S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \frac{1}{1-x}$, n

$S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \frac{1}{1-x}$

II способ

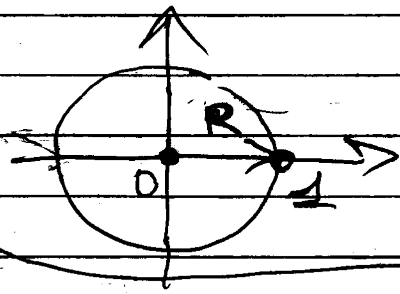
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,+1)$$

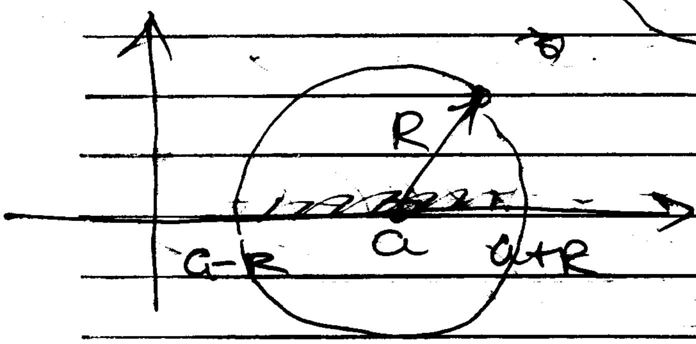
Зам



$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$R = 1$





$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}}$$

~~Ув Опр~~

Зам Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|$, то он $=\frac{1}{R}$

Нап, что на $(-R,+R)$ ряд сх-ся абс-но

а на $\forall [-R+\delta, R-\delta] \subset (-R,+R)$ — равн-но

Стандартные разл-я! Тейлора Маклорена

1) $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ — аналит-ая

$\Rightarrow$ ~~Ряд~~ на $(-R,+R)$ ряд сх-ся к e^x

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 \Rightarrow R = \infty$$

2) $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $R = \infty$

3) $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $R = \infty$

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$.

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \frac{k}{k+1} \to 1 \Rightarrow R = 1$$

$x = -1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}$ — расх

$x = +1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ — ряд Лейбница, b_k

$b_k = 1/k \searrow 0 \Rightarrow$ сх-ся (условно)

т.о. $(-1, +1]$ — пром сх-ти

5) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x)^2} =$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

15

$c_k = \{1, 0, -1, 0, 1, \ldots\}$

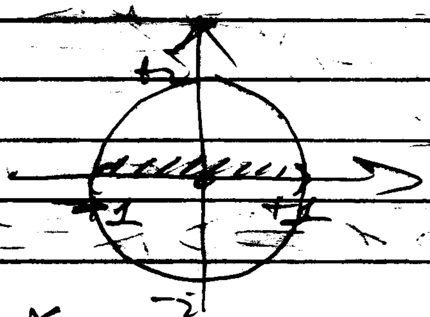
$|c_k| = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$

$\underline{\lim}_{k\to\infty} |c_k| = 0 \quad \overline{\lim}_{k\to\infty} |c_k| = 1 = \frac{1}{R}$

$\Rightarrow R = 1, \; (-1, +1)$

$\frac{1}{1+z^2}$

$z = \pm i$



$f(x) = \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx\right] =$

т.к. $f(0) = 0$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

$R = 1, \; [-1, +1]$

(6) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}_{c_k} x^k}_{a_k}$

$\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$

$\Rightarrow R = \frac{1}{e}$

При $x = \pm\frac{1}{e} \Rightarrow |a_k| = \left[\frac{(1+\frac{1}{k})^k}{e}\right]^k =$

$= e^{k \ln \frac{(1+\frac{1}{k})^k}{e}} = e^{k[k\ln(1+\frac{1}{k})-1]} =$

$= e^{k[k(\cancel{\frac{1}{k}}+\bar{\bar{o}}(\frac{1}{k}))-\cancel{1}]} = e^{\bar{\bar{o}}(1)} \to 1, \ k\to\infty$

$\Rightarrow$ расх

т.о. $(-1, +1)$ – ~~пром~~ сх-ти

(7) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{(1+\frac{1}{k})^{k^2}}_{c_k} \frac{x^k}{k}}_{a_k}$

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} (1+\frac{1}{k})^{k} \frac{1}{\cancel{\sqrt[k]{k}}} = e$

Пр сх-ти $= \left[-\frac{1}{e}, +\frac{1}{e}\right)$

(8) $\sum_{k=1}^{\infty} (1+\frac{1}{k})^{k^2} \frac{x^k}{k^2}$

Д-те, что Пр сх-ти $= \left[-\frac{1}{e}, +\frac{1}{e}\right]$

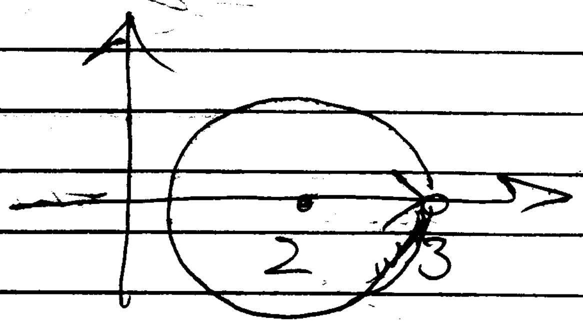
(9) $f(x) = \frac{x-2}{3-x} \quad x=2$

$x-2 = y \Rightarrow x = 2+y$

$f = \frac{y}{1-y} = y(1+y+y^2+\dots) =$

$= y+y^2+\dots = \sum_{k=1}^{\infty} y^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1\cdot(x-2)^k$

$\Rightarrow R = 1$



$\frac{z-2}{3-z}$

(10) $f(x) = -\ln(1-x) = -\ln(1+(-x)) =$

$= -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-x)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

$(-x) \in [-1,+1) \Rightarrow x \in (-1,+1]$