Лекция 1

Глава 9

Функции нескольких переменных

Примеры

1) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Phi(a,b)$

2) $u = T(x,y,z,t)$ – температура среды в точке $M(x,y,z)$ в момент времени t (предполагается, что задана нек-ая система координат)

Первая задача – опр-ть пред-ый переход, но для этого сперва необх-мо ввести ряд вспомогат-ых понятий

§1 Координатное пространство

Опр Совокупность m чисел наз-ся упорядоченной, если указано, какое из чисел явл-ся первым, какое вторым и т.д. – это опр-ие относится к числам $\forall$ природы

Обозн $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Напр $(5, 4, 3)$ Несмотря на то, что
1-ое число, 2-ое, 3-е
$3 < 4 < 5$

Опр m-мерным коорд-м пространством $\mathbb{R}^m$ наз-ся мн-во всех упорядоченных совокупностей $(x_1, \dots, x_m)$ m вещ-х чисел. При этом сами совокупности $(x_1, \dots, x_m)$ наз-ся точками координатного пр-ва

Обозн $M(x_1, \dots, x_m)$ – т-ки пр-ва
коорд-ты т-ки M

Опр m-мерным евклидовым пр-ом E^m наз-ся коорд-ое пр-во $\mathbb{R}^m$ в котором между $\forall$ двумя точками $M_1(x_1, \dots, x_m)$ и $M_2(y_1, \dots, y_m)$ опр-но расстояние

$$\rho(M_1, M_2) \equiv \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_m-y_m)^2} \qquad \cancel{(1)}$$

Зам 1 Расстояние между точками пр-ва $\mathbb{R}^m$ можно вводить и с помощью других соотношений, однако под евклидовыми пр-ами мы будем подразумевать только те коорд-ые пр-ва, в которых расстояние опр-но именно этой формулой

Зам 2 Поскольку дальше мы всегда будем расс-ть пр-ва $\mathbb{R}^m$ со введённым по формуле (1) расст-ем ρ, то обозначения $\mathbb{R}^m$ и E^m можно воспринимать как синонимы

Зам 3 Расст-ие $\rho(M_1, M_2)$, определяемое формулой (1) часто наз-ют евклидовым расст-ем между т-ми M_1 и M_2, а саму ф-ию $\rho: (M_1, M_2) \mapsto \rho$ - евклидовой метрикой пр-ва $\mathbb{R}^m$

Зам 4 Введённое нами понятие евклидова пр-ва не следует путать с евклидовым пр-ом из курса лин-ой алгебры. В курсе лин-ой алгебры евклидово пр-во - это лин-ое пр-во со скалярным произв-ем. В нашем же случае евклидово пр-во - это частный случай т.н. метрического пр-ва, т.е. мн-ва точек, между которыми опр-но расстояние ρ (наз-се метрикой). Впрочем, совпадение названий, разум-ся, не случайно: каждой точке $M(x_1, \ldots, x_m)$ можно $\leftrightarrow$

вектор $\{x^1, \ldots, x^m\}$ после чего в полученном пр-ве векторов ввести скалярное произв-ие: $\forall x = \{x^1, \ldots x^m\}$, $y = \{y^1, \ldots, y^m\} \mapsto (x, y) \equiv x^1 y^1 + \ldots + x^m y^m$.
Тогда расстояние между т-ми M_1 и M_2 будет = корню из скалярного произв-ия разности векторов, отвечающих этим точкам

Геометр-ая интерпретация

$E^1: \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1|$
$\uparrow$
координатная (евклидова) прямая (по умолчанию на координатной прямой всегда задана евклидова метрика)

E^2, E^3 – плоскость и пр-во (в узком смысле) с декартовыми координатами

E^m – естественное обобщение обычного пр-ва E^3

Пусть A – т. E^m: $A \in E^m$, $R > 0$ – вещ-ое число

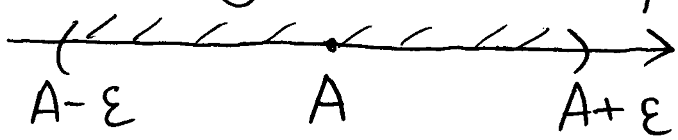
Опр $\{M \in E^m \mid \rho(M, A) \leq R\} \equiv \overline{K}_R(A)$ – m-мерный шар радиуса R с центром в т. A

$\{M \in E^m \mid \rho(M, A) < R\} \equiv K_R(A)$ – открытый m-мерный шар —"—

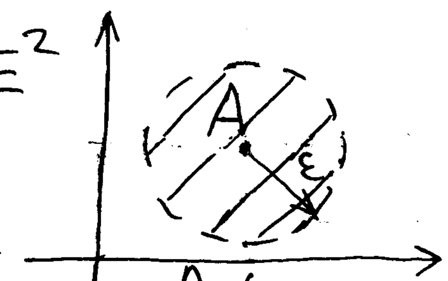
$\{M \in E^m \mid \rho(M,A)=R\} \equiv \Omega_R(A)$ - m-мерная сфера —"—

Опр $K_\varepsilon(A) \equiv O_\varepsilon(A)$ — ε-окр-ть т. A

Частные случаи ε-окр-ей

в E^1 

- интервал

в E^2 

- открытый круг

Пусть $A(a_1,\dots,a_m) \in E^m$, $d_1,\dots,d_m > 0$

Опр $\{M(x_1,\dots,x_m) \mid |x_1-a_1| \le d_1,\dots,|x_m-a_m| \le d_m\}$ - m-мерный параллелепипед

(в случае < нер-в - открытый m-й пар-пед)

Рассм-им произв-ое мн-во $\{M\} \subset E^m$

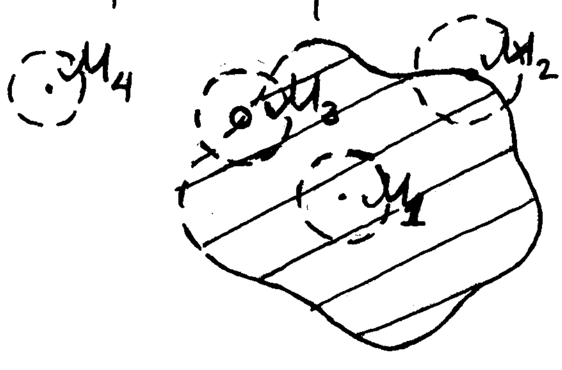
Опр M_0 наз внутренней т. $\{M\}$, если $\exists$ ε-окр-ть этой т-ки, целиком $\in \{M\}$

Опр M_0 наз граничной т. $\{M\}$, если в $\forall$ её ε-окр-ти $\exists$ точки как $\in \{M\}$, так и $\notin \{M\}$

Опр M_0 наз предельной т. $\{M\}$, если в $\forall$ её ε-окр-ти $\exists$ точка $\in \{M\}$, отличная от M_0 $\Leftrightarrow$ в $\forall$ её ε-окр-ти $\exists$ ∞ много точек $\in \{M\}$

Опр M_0 наз изолированной т. $\{M\}$, если $M_0 \in M$ и $\exists$ ε-окр т. M_0, в которой нет точек из $\{M\}$, отличных от M_0

Пример 1



Внутр: M_1
Гран: M_2, M_3, M_4
Пред: M_1, M_2, M_3
Изол: M_4

Точки прикосновения мн-ва $\{M\}$

Гран. т. → пред. т. ≡ пограничная т.: M_2, M_3
→ не пред. т. – изол. т: M_4

Пред. т. → гран. т. ≡ погран. т.
→ не гран. т. – внутр: M_1

Точки прикосновения

внутренние	пограничные	изолиров-ые
M_1	M_2, M_3	M_4

пред т-ки: внутренние и пограничные
гран-ые т-ки: пограничные и изолиров-ые

$\in \{M\}$ — могут $\in$ и $\notin \{M\}$ — $\in \{M\}$

Опр $\{M\}$ наз-ся открытым, если все его точки – внутренние

Опр $\{M\}$ наз-ся замкнутым, если оно содержит все свои гр-ые точки $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ пред т-ки $\Leftrightarrow$ погр т-ки

Пример 2

Открытое мн-во $\{M\}$

Граница Г мн-ва $\{M\}$ - замкнутое мн-во

Замыкание мн-ва $\{M\}$ - замкнутое мн-во

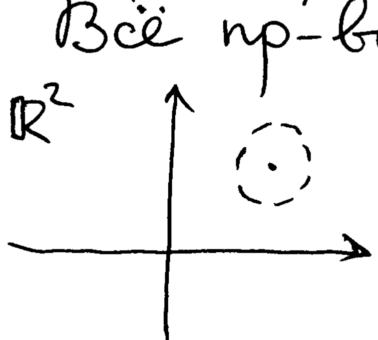
Опр Совокупность всех граничных точек мн-ва $\{M\}$ наз-ся границей Г мн-ва $\{M\}$

Опр $\{M\} + Г$ = замыкание мн-ва $\{M\}$

Зам Замкнутое мн-во совпадает со своим замыканием

Пример 3

Всё пр-во $\mathbb{R}^2$ явл-ся одновременно и



и замкнутым (у него просто нет граничных точек, а потому по договоренности считают, что оно содержит все эти точки)

Опр Мн-во наз-ся огран-м, если оно $\in$-ит некоторому шару $\Leftrightarrow$ $\in$-ит нек-му шару с центром в начале коорд-ат $O(0,\ldots,0)$

док-ть сам-но

Опр Непрер-ой кривой в пр-ве E^m наз-ся мн-во

$$L=\{M(x_1,\ldots,x_m) \mid x_1=\varphi_1(t),\ldots,x_m=\varphi_m(t),\ t\in[\alpha,\beta]\},$$

где $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\in C[\alpha,\beta]$ – классу ф-ий непр-ых на отр $[\alpha,\beta]$

Обозн $M(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t))\equiv M^t$ либо M_t – произвольная т-ка кривой

Пусть $A\equiv M^\alpha$, $B\equiv M^\beta$

A, B – концы кривой L

$A=B$ – замкнутая кривая

Зам Говорят также, что кривая L соединяет точки A и B

Опр $\{M(x_1,\ldots,x_m) \mid x_1=x_1^0+a_1t,\ldots,x_m=x_m^0+a_mt,\ t\in\mathbb{R}\}$ – прямая в E^m, проходящая через т. $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0)$

$\{a_1,\ldots,a_m\}$ – обобщение направляющего вектора прямой в E^3 (напр-й вектор в обобщ-м смысле)

t – параметр прямой

Опр Мн-во наз-ся связным, если $\forall$ две его точки можно соединить непре-р-ой кривой, целиком $\in$-ей этому мн-ву (от слова "связать")

Опр Открытое связное мн-во наз-ся областью

Зам Замыкание области G (именно области) принято обозначать $\overline{G}$:

$$\overline{G} \equiv G + \Gamma$$

Окр-ть т. A

Замкнутая окр-ть т. A

Опр Окр-тью т. A наз-ся $\forall$ область, содерж-ая эту точку

Зам ε-окр т. A явл-ся частным (симметричным) случаем произв-ой окр-ти этой точки (но общий случай в конечном счёте сводится к частному!)

Задан 1 Δ-ть, что в $\forall$ окр-ти G т. A содержится ε-окр этой т-ки

Задан 2 Д-ть, что замкнутая обл-ть $\overline{G} \equiv G + \Gamma$ не может содержать изолир-ых точек

§2 Последовательности точек

Опр Если $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto M_n \in E^m$, то говорят, что опр-на посл-ть точек $\{M_n\}$ пр-ва E^m

Зам Т.е. по сути посл-ть — это ф-ция, которая каждому нат-му n ставит в соотв-ие точку $M(n) \equiv M_n$ пр-ва E^m

Опр Точка A наз-ся пределом посл-ти $\{M_n\}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, A) = 0$, т.е., если

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow \underbrace{\rho(M_n, A)}_{\equiv \rho_n \geq 0} < \varepsilon$$

это вместо $|M_n - A|$ (если проводить аналогию с одномерным случаем)

Обозн $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$ или $M_n \to A$ при $n \to \infty$

Зам Если lim сущ-ет, то говорят, что $\{M_n\}$ сходится к A

Если не сущ-ет, то $\{M_n\}$ — расходится

Лемма 1 (о покоорд-ой сход-ти)

Сход-ть посл-ти $\Leftrightarrow$ покоорд-ой сх-ти,

т.е. $M_n(x_1^n, \dots, x_m^n) \to A(a_1, \dots, a_m)$ при $n \to \infty$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^n \to a_1 \\ \text{—— '' ——} \\ x_m^n \to a_m \end{cases} \text{при } n \to \infty$$

Δ Док-во опирается на формулу

$$\rho(M_n, A) = \sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + \dots + (x_m^n - a_m)^2}$$ и

остаётся в качестве самост-го упр-ия

Опр Посл-ть $\{M_n\}$ наз-ся фундаментальной, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, \cancel{m}\,k > N \Rightarrow \rho(M_n, M_{\cancel{m}k}) < \varepsilon$

это вместо $|M_n - M_{\cancel{m}k}|$

Лемма 2 (о покоординатной фундам-ти)

$\{M_n(x_1^n, \dots, x_m^n)\}$ - фундам-на $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{x_1^n\}, \dots, \{x_m^n\}$ (рассм-ые как ф-ии n) - фундам-ны

Δ Док-во полностью анал-но док-ву леммы 1 и также остаётся в кач-ве самост-го упр-ия

Теорема 1 (критерий Коши для посл-ти точек)

Сх-сть $\{M_n\} \Leftrightarrow$ Фундам-ти $\{M_n\}$

Δ Сх-ть $\{M_n(x_1^n, \ldots, x_m^n)\} \overset{\text{лемма 1}}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow$ сх-ти $\{x_1^n\}, \ldots, \{x_m^n\} \overset{\text{см. Критерий Коши для числовых посл-ей}}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow$ фунд-ти $\{x_1^n\}, \ldots, \{x_m^n\} \Leftrightarrow$ лемма 2

$\Leftrightarrow$ фунд-ти $\{M_n(x_1^n, \ldots, x_m^n)\}$ $\blacktriangle$

Теорема 2 (Больцано-Вейерштрасса для посл-ти точек)

Из $\forall$ огр-ой посл-ти $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпосл-ть $\{M_{n_k}\}$

Зам 1 Понятие подпосл-ти посл-ти точек ан-но понятию подпосл-ти числовой посл-ти (вообще понятие подпосл-ти универсально-оно вводится единообразно для посл-ей эл-ов $\forall$ природы)

Зам 2 Также как и в одномерном случае под огр-ой посл-тью понимается такая посл-ть, мн-во всех эл-ов которой явл-ся огран-ым, т.е. $\in$-ит некоторому шару ~~с центром~~ (в том числе шару с центром в начале координат)