Функции неск-х перем-х (Глава IX) 1.1

Примеры

1) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Phi(a,b)$

2) $u = T(x,y,z,t)$ — т-ра среды

Первая з-ча — пред-й переход (нужны вспомогат понятия)

§1 Координ-ое пр-во

Опр Сов-ть m чисел наз-ся упорядоченной, если указано, какое из чисел явл-ся ~~пер-вым~~ 1-м, какое ~~вторым~~ 2-м и т. д.

Обозн $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Напр $(5, 4, 3)$

Опр m-мерным коорд-м пр-м R^m наз мн-во всех упоряд-х совок-ей ~~$(x_1, \dots, x_m)$~~ m веществ-х чисел. При этом сами сов-ти $(x_1, \dots, x_m)$ наз т-ми коорд-го пр-ва

Обозн $M(x_1, \dots, x_m)$ — т-ки пр-ва

к-ты т-ки M

Опр m-мерным евклидовым пр-ом E^m наз коорд-е пр-во $\mathbb{R}^m$, в котором мера gy $\forall$ двумя т-ми $M_1(x_1, \dots, x_m)$ и $M_2(y_1, \dots, y_m)$ опр-но расст-ие

1.2

$$\rho(M_1, M_2) \equiv \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_m-y_m)^2}$$

Частные случаи:

E^1: $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1-y_1)^2} = |x_1 - y_1|$

↑

коорд-я (евклидова) прямая

E^2, E^3 — пл-ть и пр-во с декартовыми коорд-ми

Пусть т. $A \in E^m$, $R > 0$ — вещ число

Опр $\{M \in E^m \mid \rho(M, A) \le R\} \equiv \overline{K}_R(A)$ — m-мерный шар р-са R с центром в т. A

$\{$ — и — $< R\} \equiv K_R(A)$ — открытый m-мерный шар — и —

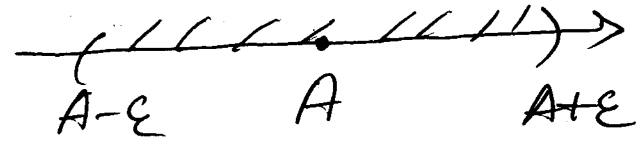
$\{$ — и — $= R\} \equiv \Omega_R(A)$ — m-мерная сфера — и —

Опр $K_\varepsilon(A) \equiv O_\varepsilon(A)$ — ε-окр-ть т. A, $\varepsilon > 0$

$\dot{O}_\varepsilon(A) \equiv O_\varepsilon(A)\setminus A$ — проколотая ε-окр т. A

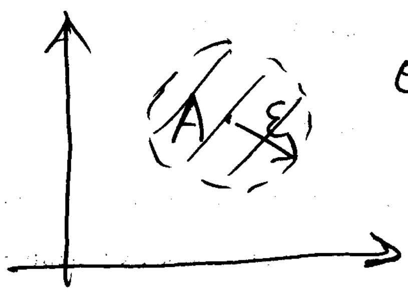
Частные случаи ε-окр-й

в E^1



интервал

в E^2



открытый круг

Рассм произв мн-во $\{M\}\subset E^m$

Опр M_0 наз внутр т. $\{M\}$, если $\exists\, O_\varepsilon(M_0)$, целиком $\in\{M\}$

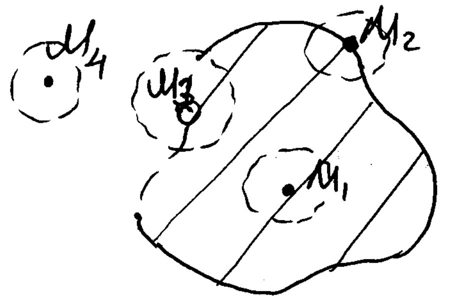
Опр M_0 наз гран т. $\{M\}$, если в $\forall\, O_\varepsilon(M_0)$ $\exists$ т-ки как $\in\{M\}$, так и $\notin\{M\}$

Опр M_0 наз пред т. $\{M\}$, если в $\forall\, \dot{O}_\varepsilon(M_0)$ $\exists$ т-ка $\in\{M\}$ $\Leftrightarrow$ в $\forall\, O_\varepsilon(M_0)$ $\exists\ \infty$ много т-к $\in\{M\}$

Опр M_0 наз изол т. $\{M\}$, если $M_0\in M$ и $\exists\, \dot{O}_\varepsilon(M_0)$, в кот нет т-к из $\{M\}$

Пример 1

1.4



Внутр: M_1

Гран: M_2, M_3, M_4

Пред: M_1, M_2, M_3

Изол: M_4

$\underbrace{\text{Внутр, Гран, Пред, Изол}}_{\text{т-ки прикосн } \{M\}}$

Гран — пред ≡ погран т: M_2, M_3

— не пред — изол т: M_4

Пред — гран ≡ погран т.

— не гран — внутр т: M_1

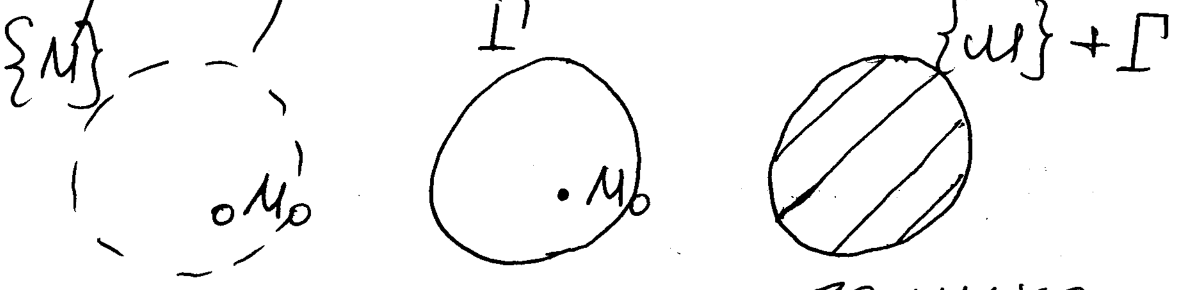
<u>Точки прикоснов-я</u>

внутр M_1	пограничн M_2, M_3	изолир M_4
пред		гран
$\in \{M\}$	могут $\in$ и $\notin \{M\}$	$\in \{M\}$

Опр $\{M\}$ наз открытым, если все его т-ки внутр-ие

Опр $\{M\}$ наз замкнутым, если оно сод-ит все свои гран т-ки $\Leftrightarrow$ пред т-ки $\Leftrightarrow$ погр т-ки

Пример 2



открытое мн-во   граница   замыкание мн-ва

Сов-ть всех гран-х т-к

Опр Мн-во наз огр-м, если оно $\in$ ~~шар~~ нек-му шару $\Leftrightarrow$ $\in$ шару с центром в т. $O(0,\dots,0)$ — н-ле ~~коор~~
Δ-ть сам-но

Опр Непр-й кривой в пр-ве E^m наз мн-во

$$L = \{M(x_1,\dots,x_m) \mid x_1=\varphi_1(t),\dots,x_m=\varphi_m(t),\ t\in[\alpha,\beta]\},$$

где $\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\in C[\alpha,\beta]$ ~~$\varphi_i(t)\in C[\alpha,\beta]$~~ — классу ф-й непр на $[\alpha,\beta]$

Обозн $M(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t))\equiv M^t$ или M_t — произв т. кривой

Пусть $A\equiv M^\alpha$, $B\equiv M^\beta$ — концы кривой L (L соединяет A и B)

$A=B$ — замкнутая кривая

Зам Непр кривая — огр мн-во (Δ-ть сам-но)

Опр $L=\{M(x_1,\dots,x_m) \mid x_1=x_1^0+a_1t,\dots,$ $x_m=x_m^0+a_mt,\ t\in\mathbb{R}\}$ — прямая в E^m

т. $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0) \in L$ (отв $t=0$)

(Сов-ть чисел) $\{a_1,\dots,a_m\} \equiv$ напр-вектор

t — параметр прямой

Зам Прямая — неогр мн-во (Д-ть сам-но)

Опр Мн-во наз связным, если $\forall$ две его точки можно соед-ть непр-й кривой, целиком $\in$-ей этому мн-ву ("связать")

Опр Открытое связное мн-во наз областью

Опр Окр-ть т. A — $\forall$ область G, сод-я т. A

Обозн $G(A)$

Зад-ие Д-ть, что $\forall$ окр $G(A) \supset$ нек $O_\varepsilon(A)$

§2 Последов-ти точек

Опр Если $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto M_n \in E^m$, то говорят, что опр-на посл-ть т-к $\{M_n\}$ пр-ва E^m

Зам $M_n = M(n)$ — ф-я n

Опр т. A наз ~~lim-м~~ пределом посл $\{M_n\}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, A) = 0$, т.е., если

1.7

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow \rho(M_n, A) < \varepsilon$

вместо $|M_n - A|$

Обозн $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$ или $M_n \to A$, $n \to \infty$

$\exists$ lim – сход $\nexists$ lim – расх

Лемма 1 (о покоорд-й сх-ти)

$M_n(x_1^n, \dots, x_m^n) \to A(a_1, \dots, a_m)$, $n \to \infty$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^n \to a_1 \\ \text{— " —} \\ x_m^n \to a_m \end{cases} \text{при } n \to \infty$$

Д-ть сам-но с помощью ф-лы

$$\rho(M_n, A) = \sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + \dots + (x_m^n - a_m)^2}$$

Опр Посл $\{M_n\}$ наз фундам-й, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, k > N \Rightarrow \rho(M_n, M_k) < \varepsilon$

вместо $|M_n - M_k|$

Лемма 2 (о покоорд-й фунд-ти)

$\{M_n(x_1^n, \dots, x_m^n)\}$ – фунд-на $\Leftrightarrow$ $\{x_1^n\}, \dots, \{x_m^n\}$ – фунд-ны

Д-во ан-но Д-ву леммы 1