Лекция 2

Д-во т-мы Больцано-Вей-са

Δ Пусть $\{M_n(x_1^n, \ldots, x_m^n)\}$ – огр-ая посл-ть $\Rightarrow$ сущ-ет шар с центром в т. $O(0, \ldots, 0)$, содерж-ий все (элем-ты посл-ти – точки) M_n:

$\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow M_n \in \overline{K}_0^R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho(M_n, O) \equiv \sqrt{(x_1^n)^2 + \ldots + (x_m^n)^2} \leq R^{*} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} |x_1^n| \leq R \\ \text{— и —} \\ |x_m^n| \leq R \end{cases}$, т.е. $\{x_1^n\}, \ldots, \{x_m^n\}$ – – огран-ые числовые посл-ти (ЧП)

корень у каждого слагаемого $\leq R$, а $\sqrt{(\ )^2} = |\ |$

Рассм-м посл-ть $\{x_1^n\}$. Она огр-на $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ по теор Б-В для числовых посл-ей (ЧП) $\exists \{x_1^{n(k_1)}\}$ (подпосл-ть $\{x_1^n\}$): $x_1^{n(k_1)} \to a_1$, $k_1 \to \infty$

к некоторому a_1

здесь $n(k_1) \equiv n_{k_1}$ – возр-ая посл-ть натур-ых чисел

у нас ещё будет много других натур-ых переменных k, поэтому приходится использовать доп-ый индекс

Рассм-м посл-ть $\{x_2^{n(k_1)}\}$ (подпосл-ть посл-ти $\{x_2^n\}$). Она может расходится, но заведомо ~~Она может~~ огр-на (т.к. ограничена вся посл-ть $\{x_2^n\}$, частью которой явл-ся $\{x_2^{n(k_1)}\}$

$\Rightarrow$ по теор Б-В для числовых посл-ей

$\exists \{x_2^{n(k_1(k_2))}\} \equiv \{x_2^{n(k_2)}\} : x_2^{n(k_2)} \to a_2, k_2 \to \infty$

подпосл-ть посл-ти $\{x_2^{n(k_1)}\}$ (а значит и всей посл-ти $\{x_2^n\}$, поскольку подпосл-ть подпосл-ти сама явл-ся подпосл-тью исходной посл-ти)

Здесь мы применили следующее соглашение: $n(k_2) \equiv n(k_1(k_2))$

новая ф-я (не путать с $n(k_1)$)

Это соглашение принято для того, чтобы не плодить обозначений для новых ф-ций (напр $n_1(k_1)$, $n_2(k_2)$ и т.д.)

Заметим, что при этом

$\{x_1^{n(k_1(k_2))}\} \equiv \{x_1^{n(k_2)}\}$ (подпосл-ть посл-ти $x_1^{n(k_1)}$):

$x_1^{n(k_2)} \to a_1, k_2 \to \infty$ (т.к. у сх-ти $x_1^{n(k_1)} \to a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сх-ть к a_1 $\forall$ её подпосл-ти)

Далее следует рассм-ть посл-ть $\{x_3^{n(k_2)}\}$ и вновь на основании т. Б-В для числовых посл-ей выделить из неё сход-ся подпосл-ть

$$\{x_3^{n(k_2(k_3))}\} \equiv \{x_3^{n(k_3)}\} \to a_3,\ k_3 \to \infty$$

— " —

Продолжая этот процесс, мы получим m подпосл-ей $\{x_1^{n(k_m)}\}, \dots, \{x_m^{n(k_m)}\}$ исходных посл-ей $\{x_1^n\}, \dots, \{x_m^n\}$ соотв-но:

$$\begin{cases} x_1^{n(k_m)} \to a_1 \\ \text{— и —} \\ x_m^{n(k_m)} \to a_m \end{cases} \text{ при } k_m \to \infty \xRightarrow{\text{Лемма 1}}$$

$\Rightarrow$ подпосл-ть $\{\mathcal{M}_{n(k_m)}(x_1^{n(k_m)}, \dots, x_m^{n(k_m)})\}$ посл-ти $\{\mathcal{M}_n(x_1^n, \dots, x_m^n)\}$:

$$\mathcal{M}_{n(k_m)}(x_1^{n(k_m)}, \dots, x_m^{n(k_m)}) \to A(a_1, \dots, a_m)$$

при $k_m \to \infty$ чтд $\not\Delta$

§3 Предел функции

Пусть $\{M\} \subset E^m$ и пусть каждой т-ке $M(x_1,\dots,x_m) \in \{M\} \mapsto$ некоторое число $u \equiv f(M) \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на $\{M\}$ опр-на ф-ия m переменных

Обозн $u = u(M)$, $u = f(M)$, $u = f(x_1,\dots,x_m)$

аргументы (незав-ые перем-ые)

$\{M\} \equiv D_f$ – область опр-ия ф-ии

$u(M)$ – частное значение ф-ии

$\{u(M) \mid M \in D_f\} \equiv E_f$ – мн-во значений ф-ии

В случае ф-ии 2-х аргументов часто используют обозн-ия

$u = f(x,y)$ или $z = f(x,y)$

Пример $z = x^2 + y^2$ – ур-ие эллиптического параболоида

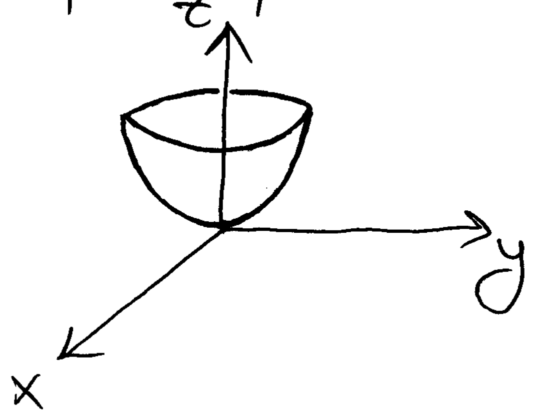


График ф-ии 2-х переменных – поверхность в пр-ве xyz, точки которой имеют коорд-ты $(x, y, z(x,y))$

Пусть $u = f(M)$: $D_f = \{M\}$ и $A(a_1,\dots,a_m)$ –

пред. т. $\{M\}$ (эти предположения распростр-ся на весь текущий §-ф)

Опр (по Коши) $b = \lim\limits_{M\to A} f(M)$, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall M : \begin{cases} M \in \{M\} \\ 0 < \rho(M,A) < \delta \end{cases} \Rightarrow$

$M \neq A$ (M не совпадает с A)

$\Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon$

Зам $\{M \in E^m \mid 0 < \rho(M,A) < \delta\} \equiv \dot{O}_\delta(A)$ – проколотая δ-окр т. A

Другое обозн-ие lim-а (покоординатное)

$\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \text{---} \, \text{"} \, \text{---} \\ x_m \to a_m}} f(x_1, \dots, x_m) = b$

Опр (по Гейне) $b = \lim\limits_{M\to A} f(M)$, если

$\forall \{M_n\} : \begin{cases} 1) M_n \in \{M\} \\ 2) M_n \to A \\ 3) M_n \neq A \end{cases} \Rightarrow f_n \equiv f(M_n) \to b$

$(M_n \cap A = \varnothing)$

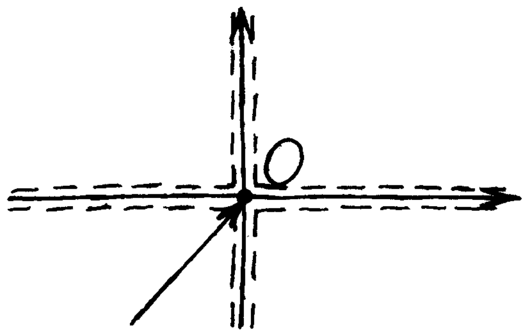
числовая посл-ть!

Теорема 3 Коши $\Leftrightarrow$ Гейне

Δ Док-ть самост-но (док-во $\Leftrightarrow$ ти в случае многих перем-х ~~сводится~~ опирается на уже доказанную $\Leftrightarrow$ ть опр-й по Коши и по Гейне предела ф-ии 1-ой переменной)

Примеры

① $u(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$



Эта ф-ия не опр-на на осях координат, тем не менее т-ка $O(0,0)$ – предельная т-ка её обл-ти опред-ия

$D_u = \{M(x,y) \mid xy \neq 0\}$

$O(0,0) \notin D_u$, но явл-ся пред-й т. D_u

$\Rightarrow$ можно поставить ? о $\exists$-ии $\lim\limits_{M\to O} u(M)$

Док-ем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = 0$ – такая ф-ия назыв-ся б.м. в т. $O(0,0)$

Δ по Коши

Возьмём $\delta(\varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall M \in D_u$: $0 < \rho(M,O) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow |u(x,y) - 0| = |x+y| \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} \underbrace{\left|\sin\frac{1}{y}\right|}_{\leq 1} \leq |x+y| =$$

$$= \sqrt{(x+y)^2} \underset{\uparrow}{\leq} \sqrt{2x^2+2y^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} < \cancel{\sqrt{2}}\frac{\varepsilon}{\cancel{\sqrt{2}}} = \varepsilon,$$

Δ-ть сам-но

т.е. $|u(x,y)| < \varepsilon$ – ч.т.д.

$\not\Delta$

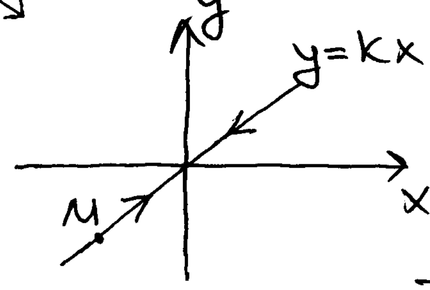
Зам. Разумеется, решить эту з-чу можно и без опоры на опр-ие предела

$$u(x,y) = \underbrace{(x+y)}_{\text{б.м.}} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{огр}} \underbrace{\sin\frac{1}{y}}_{\text{огр}} = \text{б.м.}$$

② $u(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ Д-ть, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \varnothing$

Δ Для решения этой з-чи исп-ся следующий популярный приём. Точку $M(x,y)$ устремляют к т. $O(0,0)$ (в которой рассм-ся предел) вдоль прямой $y=kx$, где k – произвольное фиксированное число (т.е. параметр) и рассм-ют предел ф-ии $u(x,y)$ при таком способе стремления т. M к началу координат (своего рода частичный предел):

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$$



Различно при разных k

Это значит, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \varnothing$,

т.к. если бы он сущ-ал, то его величина не зависела от способа стремления т. M к предельной т. O ▲

Пусть $f(M)$ и $g(M)$: $D_f = D_g = \{M\}$ и A – пред. т. $\{M\}$

Опр $f = \bar{\bar{o}}(g)$ в т. $A \iff f(M) = \gamma(M) \cdot g(M)$, где $\gamma(M)$ – б.м. в т. A

Опр $f = \underline{\underline{O}}(g)$ в т. $A \iff f(M) = \gamma(M) \cdot g(M)$, где $\gamma(M)$ – огр. в т. A, т.е. сущ-ет такая окр-ть т. A, в кот $\gamma(M)$ – огр-на

Зам f и g не обязат-но б.м. (и даже огр-ые)

Пример

③ $f(x,y) = x^3+y^3$, $g(x,y) = x^2+y^2$

$$\gamma(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \to 0 \text{ при } \begin{cases} x\to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$$

убедиться самост-но

$\Rightarrow f = \bar{\bar{o}}(g)$ в т. $O(0,0)$

Теорема 4 (об арифм-х опер-ях)

Пусть $\left.\begin{matrix} f(M) \to b \\ g(M) \to c \end{matrix}\right.$ при $M \to A$

Тогда $\left.\begin{matrix} f(M) \pm g(M) \to b \pm c \\ f(M) \cdot g(M) \to b \cdot c \\ f(M)/g(M) \to b/c \ (c \neq 0) \end{matrix}\right.$ при $M \to A$

Δ Док-ть самост-но

Опр Говорят, что ф-я $u = f(M)$ удовл-ет в т. A условию Коши, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall M_1, M_2 \in \{M\} \cap \dot{O}_\delta(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$

Теорема 5 (Критерий Коши для ф-ий многих перем-ых)

Сущ-ие $\lim\limits_{M \to A} f(M) \Leftrightarrow$ $f(M)$ удовл-ет в т. A усл-ю Коши

Δ Можете док-ть самост-но в кач-ве дополн-го упр-ия (на экзамен не выношу)

<u>Предел</u> <u>ф-ии</u> <u>на</u> <u>∞-ти</u>

Пусть $u = f(M) : D_f = \{M\}$ - неогр-ное мн-во

(в этом случае говорят также, что ∞ - - предельная т-ка мн-ва $\{M\}$)

Опр $b = \lim\limits_{M \to \infty} f(M)$, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists R > 0 : \forall M : \begin{cases} M \in \{M\} \\ \rho(O, M) > R \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon$

Другое (покоординатное) обозн-ие
$$\lim_{\substack{x_1\to\infty\\ \text{и}\\ x_m\to\infty}} f(x_1,\dots,x_m)=b$$
} это просто обозначение! (условное)

Но вообще этой записи лучше избегать (т.к. иногда оно всё-таки понимается буквально)

На самом деле мы рассм-ем предел при $\rho(0,M)\to\infty$, т.е. при $\sqrt{x_1^2+\dots+x_m^2}\to\infty$. Но такой способ стремления к ∞-ти т-ки M вовсе не предполагает обязат-го неогр-го увеличения всех её координат. Напр, т. M может "уходить" на ∞-ть вдоль коорд-й оси x_1, тогда $x_1\to\infty$, но $x_2=\dots=x_m=0$

Примеры

④ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\equiv\frac{\cancel{\rho}(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\rho^{\cancel{2}}\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}}$$

$\rho=\rho(x,y)$, $\varphi=\varphi(x,y)$

На самом деле мы не переходим к новым переменным. Мы просто преобразуем и оцениваем выр-ие для нашей ф-ии

$|\cos\varphi+\sin\varphi| \le 2$ (точнее даже $\le\sqrt{2}$)

$$\Rightarrow 0 \le \left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{2}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ при $\rho\to\infty$

$0 \quad 0 \quad 0$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$$

В многомерном случае также работает теорема о двух полицейских

⑤ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Рассм-те $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to\infty}}$, убедитесь в том, что он $=f(k)$ (зависит от k), и что тем самым $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} = \varnothing$

Повторные пределы выносятся на семинары

§4 Непрерывные ф-ции

Пусть $u=f(M)$: $D_f=\{M\}\subset E^m$

и пусть $A\in\{M\}$ — пред-ая т. $\{M\}$

Опр Ф-я $u=f(M)$ наз-ся непр в т. A, если $\lim\limits_{M\to A} f(M)=f(A)$

(т.е. предельное значение в т. A ф-ии $f(M)$ совпадает с её частным значением в этой точке)

Опр Т. A наз-ся точкой разрыва ф-ии $f(M)$, если

1) A – пред. т. $\{M\}$ (может $\notin \{M\}$)

2) $f(M) \not\to f(A)$ при $M \to A$

(т.е. $f(M)$ не явл-ся непр-ой в т. A)

Введём понятие приращения ф-ии

$$\Delta u(M) \equiv f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{перем}}}{M}) - f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{фикс}}}{A})$$
– приращение (полное) ф-ии $u = f(M)$

С помощью приращения ф-ии условие непр-ти в т. A можно записать в виде

$$\lim_{M \to A} [f(M) - f(A)] \equiv \boxed{\lim_{M \to A} \Delta u = 0}$$

разностная форма усл-ия непр-ти в т. A

Пусть $M(x_1, \dots, x_m)$, $A(a_1, \dots, a_m)$. Положим

$$\Delta x_i \equiv x_i - a_i \quad \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow x_i = a_i + \Delta x_i \Rightarrow$$

приращения арг-ов ф-ии $f(M)$

$\Rightarrow M(a_1+\Delta x_1, \ldots, a_m+\Delta x_m) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta u \equiv f(M) - f(A) = f(a_1+\Delta x_1, \ldots, a_m+\Delta x_m) -$

$- f(a_1, \ldots, a_m) = \Delta u(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$

фикс-ые числа

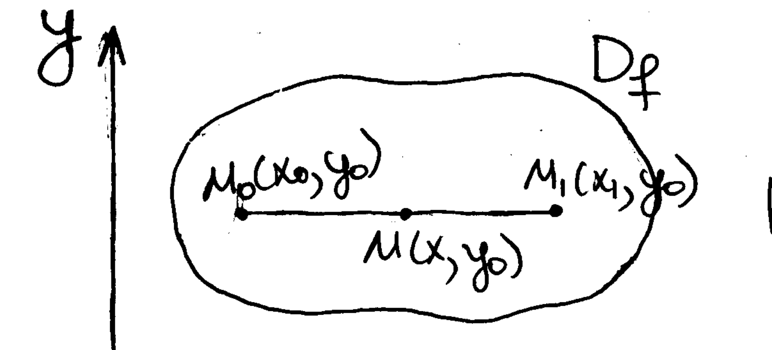
В таких обозначениях условие непр-сти принимает вид

$$\boxed{\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \text{и} \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0}$$

– покоординатная форма разностного усл-ия непрерывности

Непрерывность по отдельным переменным

Для наглядности рассм-им ф-ию 2-х перем-ых $u = f(M) = f(x,y)$



Пусть ф-я $u=f(x,y)$: $D_f \supset$ нек-ый отр. $[M_0(x_0,y_0), M_1(x_1,y_0)] \parallel$ оси OX

частный случай непр-ой кривой (опр-ие дать самост-но)

Зафиксируем аргумент y, положив $y=y_0$. Получим ф-ию $f(x,y_0)$ одной переменной x, для которой x_0 будет предельной точкой обл-ти опр-ия

$$\underbrace{f(x, y_0)}_{} \equiv \tilde{f}(x): \ x = x_0 - \text{пред. т. } D_{\tilde{f}}$$

перем фикс

Следов-но мы можем говорить о пределе и соотв-но о непр-ти ф-ии $f(x, y_0)$ в т. $x = x_0$

Опр Ф-я $u = f(x,y)$ наз-ся непр в т. $M_0(x_0, y_0)$ по перем-ой x, если ф-ия $f(x, y_0)$ однoй перем-й x непр-на в т. $x = x_0$

Непр-ть по перем-й y опр-ся полностью ан-но

Введём понятие частного приращ-ия ф-ии

$$\Delta_x u(\Delta x) \equiv \Delta u(\Delta x, 0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

— частное приращение ф-ии $u = f(x, y)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$, соотв-ее прир-ию Δx арг-та x

Тогда условие непр-ти в т. M_0 перем-ой x можно записать в виде

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0}$$ — разностная форма усл-ия непр-ти по перем-ой x

$\Delta_y u$ опр-ся анал-но

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta_y u = 0 \leftarrow$ непр-ть по y

Зам Чтобы дополнительно подчеркнуть отличие непр-ти по отдельным переменным от "обычной" ("общей") непр-сти, последнюю называют также непрерывностью по совокупности переменных (ф-ия может быть непр-ой ~~п~~отдельно по x и отд-но по y, но не быть "просто" непр-ой – пример см. ниже ~~на~~ в след. лекции)

Непр-ть $\overset{\text{синоним}}{\equiv}$ непр-ть по сов-ти перем-ых $\not\equiv$ непр-ти по отдельным перем-м