Теор 1 (кр-й Коши для посл-ти т-к) 2.1

Сх-ть $\{M_n\} \Leftrightarrow$ Фунд-ти $\{M_n\}$

Δ Сх-ть $\{M_n(x_1^n, \dots, x_m^n)\} \Leftrightarrow$ Лемма 1

$\Leftrightarrow$ сх-ти $\{x_1^n\}, \dots, \{x_m^n\} \Leftrightarrow$ кр-й Коши для ЧП (числ посл)

$\Leftrightarrow$ фунд-ти $\{x_1^n\}, \dots, \{x_m^n\} \Leftrightarrow$ Лемма 2

$\Leftrightarrow$ фунд-ти $\{M_n(x_1^n, \dots, x_m^n)\}$ $\not\Delta$

Теор 2 (Б-В для посл-ти т-к)

И $\forall$ огр-й посл $\{M_n\}$ можно выделить ~~сх-ся~~ сход подпосл $\{M_{n_k}\}$

Δ Пусть $\{M_n(x_1^n, \dots, x_m^n)\}$ - огр-~~ая~~на

$\Rightarrow \exists$ шар $\overline{K}_R(O(0, \dots, 0))$:

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow M_n \in \overline{K}_R(O) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho(M_n, O) \equiv \sqrt{(x_1^n)^2 + \dots + (x_m^n)^2} \le R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_1^n| \le R \\ \text{— " —} \\ |x_m^n| \le R \end{cases}, \text{ т.е. } \{x_1^n\}, \dots, \{x_m^n\} -$$

- огр-ые ЧП

(Мы Δ-ли покоорд-ю огр-ть)

2.2

Рассм ~~подп~~ $\{x_1^n\}$. Она огр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теор Б-В для ЧП

$\exists \{x_1^{n(k_1)}\} \subset \{x_1^n\} : x_1^{n(k_1)} \to a_1,\ k_1 \to \infty$

$n(k_1) \equiv n_{k_1}$ - возр посл натур чисел

Рассм подпосл $\{x_2^{n(k_1)}\} \subset \{x_2^n\}$ - огр. Она может расх, но заведомо огр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теор Б-В для ЧП

$\exists \{x_2^{n(k_1(k_2))}\} \subset \{x_2^{n(k_1)}\} \subset \{x_2^n\} : x_2^{n(k_1(k_2))} \to a_2,\ k_2 \to \infty$

$\{x_2^{n(k_2)}\} \to a_2,\ k_2 \to \infty$

Здесь $n(k_2) \equiv n(k_1(k_2))$ - не путать с $n(k_1)$

Зам, что т.к. при этом

$\{x_1^{n(k_1(k_2))}\} \subset \{x_1^{n(k_1)}\} \to a_1,\ k_1 \to \infty$

то $\{x_1^{n(k_1(k_2))}\} \equiv \{x_1^{n(k_2)}\} \to a_1,\ k_2 \to \infty$

Рассм $\{x_3^{n(k_2)}\} \subset \{x_3^{n(k_1)}\} \subset \{x_3^n\}$ - огр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Б-В для ЧП

$\exists \{x_3^{n(k_2(k_3))}\} \equiv \{x_3^{n(k_3)}\} \to a_3,\ k_3 \to \infty$

и

В итоге получим подп-ти

$\{x_1^{n(k_m)}\} \subset \{x_1^n\}, \dots, \{x_m^{n(k_m)}\} \subset \{x_m^n\}$:

$$\begin{cases} x_1^{n(k_m)} \to a_1 \\ \text{——— и ———} \\ x_m^{n(k_m)} \to a_m \end{cases} \text{ при } k_m \to \infty \overset{\text{лемма 1}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow M_{n(k_m)}(x_1^{n(k_m)}, \dots, x_m^{n(k_m)}) \to A(a_1, \dots, a_m), \quad k_m \to \infty$$

т.о. $\exists \{M_{n(k_m)}\} \subset \{M_n\}$ и $M_{n(k_m)} \to A$, $k_m \to \infty$

$\triangle$

§3 Предел ф-ии

Пусть $\{M\} \subset E^m$ и пусть

$\forall M(x_1, \dots, x_m) \in \{M\} \overset{f}{\longmapsto} u \equiv \cancel{f(M)} \in \mathbb{R}$

Тогда говорят, что на $\{M\}$ опр-на ф-ия m перем-х

Обозн $u = u(M) = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$

$\{M\} \equiv D_f$ — обл опр

$\{u(M) \mid M \in D_f\} \equiv E_f$ — мн-во зн-ий

В случае 2-х арг-в: $u=f(x,y)$ или $z=f(x,y)$ 2.4

Пример $z=x^2+y^2$

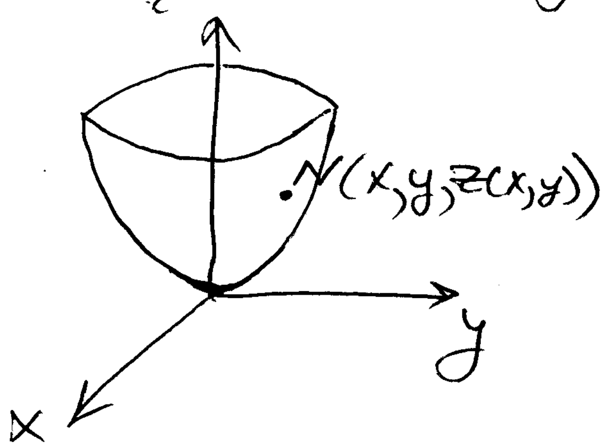


График ф-ии z — поверхность в пр-ве xyz

Пусть $u=f(M)$: $D_f=\{M\}$ и пусть $A(a_1,\dots,a_m)$ — пред. т. $\{M\}$

Опр (по Коши) $b=\lim\limits_{M\to A} f(M)$, если

$$\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\delta>0: \forall M: \underbrace{\begin{cases} M\in\{M\}\\ 0<\rho(M,A)<\delta\end{cases}}_{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(M)-\overset{b}{\cancel{f(A)}}|<\varepsilon$$

Зам $M\in\{M\}\cap \dot{O}_\delta(A)$

Другое обозн: $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ \text{и}\\ x_m\to a_m}} f(x_1,\dots,x_m)=b$

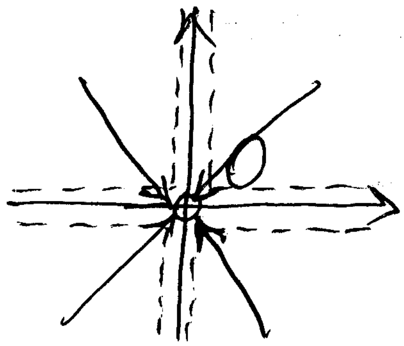
Опр (по Гейне) $b=\lim\limits_{M\to A} f(M)$, если

$$\forall\{M_n\}: \begin{cases} M_n\in\{M\}\\ M_n\to A\\ M_n\neq A\end{cases} \Rightarrow \underset{\text{ЧП}}{f_n}\equiv f(M_n)\to b$$

Теор 3 Коши $\Leftrightarrow$ Гейне 2.5

Д-ть сам-но (исп-я $\Leftrightarrow$-ть Коши и Гейне для ф-й 1-й пер-й)

(1) $u(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$



$D_u = \{M(x,y) \mid xy \neq 0\}$

т. $O(0,0) \notin D_u$, но явл пред. т. D_u

Д-м, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = 0$ – б.м. в т. $O(0,0)$

огр. х б.м. х б.м.

Д По Коши

Возьмём $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\sqrt{2}$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall M \in D_u$: $0 < \underbrace{\rho(M,O)}_{=\sqrt{x^2+y^2}} < \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow |u(x,y) - 0| = |x+y| \underbrace{|\sin\frac{1}{x}|}_{\leq 1} \underbrace{|\sin\frac{1}{y}|}_{\leq 1} \leq$

$\leq |x+y| = \sqrt{(x+y)^2} \leq \sqrt{2x^2+2y^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} <$

$< \cancel{\sqrt{2}}\frac{\varepsilon}{\cancel{\sqrt{2}}} = \varepsilon$, т.е. $|u(x,y)| < \varepsilon$ чтд $\not\Delta$

② $u(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = ?$ 2.6

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}} = \frac{k}{1+k^2} = f(k)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \varnothing$$

Пусть $f(M)$ и $g(M)$: $D_f = D_g = \{M\}$ и пусть A – пред. т. $\{M\}$

Опр $f = \bar{\bar{o}}(g)$ в т. $A \Leftrightarrow f(M) = \gamma(M)\cdot g(M)$, где $\gamma(M)$ – б.м. в т. A

Опр $f = \underline{\underline{O}}(g)$ в т. $A \Leftrightarrow f(M) = \gamma(M)\cdot g(M)$, где $\gamma(M)$ – огр. в т. A, т.е. $\exists G(A)$: $\gamma(M)$ огр. в $G(A)$

③ $f(x,y) = x^3+y^3$, $g(x,y) = x^2+y^2$

$$\gamma(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \to 0 \text{ при } \begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases}$$

Δ-ть сам-но

$\Rightarrow f = \bar{\bar{o}}(g)$ в т. $O(0,0)$

Теор 4 (об арифм-х оп-х)

Пусть $f(M) \to b$, $g(M) \to c$ при $M \to A$

Тогда $f \pm g \to b \pm c$

$f \cdot g \to b \cdot c$ при $M \to A$

$f/g \to b/c$ $(c \neq 0)$

Д-ть сам-но

Опр Говорят, что ф-я $u = f(M)$ удовл-т в т. A усл-ю Коши, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall M_1, M_2 \in \{M\} \cap \dot{O}_\delta(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$

Теор 5 (кр-й Коши для ф-й мн-х пер-х)

Сущ-ие $\lim\limits_{M \to A} f(M) \Leftrightarrow$ $f(M)$ удовл-т в т. A усл-ю Коши

Бу Д-ва (на экз не выносится)

Предел ф-ии на ∞-ти

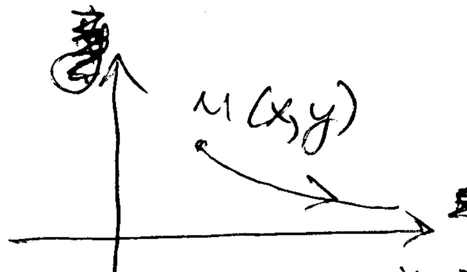
Пусть $u = f(M)$: $D_f = \{M\}$ – неогр мн-во

Опр $b=\lim\limits_{M\to\infty} f(M)$, если

$$\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists R>0: \forall M: \begin{cases} M\in\{M\} \\ \rho(O,M)>R\end{cases} \Rightarrow |f(M)-b|<\varepsilon$$

④ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}=?$

$\underbrace{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}$ усл-я запись, т.к.



$M\to\infty$ но $\begin{matrix} x\to\infty \\ y\to 0\end{matrix}$

$$M\to\infty \Leftrightarrow \rho(O,M)=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty \begin{matrix}\not\Rightarrow \\ \Leftarrow\end{matrix} \begin{cases} x\to\infty \\ y\to\infty\end{cases}$$

Лучше было бы писать $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ $\square$

$x=\rho\cos\varphi \qquad \rho=\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$y=\rho\sin\varphi \qquad \varphi=\varphi(x,y)=$ — " —

$$\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\cancel{\rho}(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\rho^{\cancel{2}}\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}}\right|\le \frac{2}{\rho}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$$

$$0\le\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad M\to\infty$

$0 \quad 0 \quad 0$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=0$$

Повторные lim-ы вынесены на семинары.