Лекция 3

Теор 6 Если ф-я $u=f(x,y)$:

1) опр-на в нек-й окр-ти т. $M_0(x_0,y_0)$ (т.е. M_0 не просто предельная т. обл-ти опр-ия, а её внутренняя точка)

2) непр-на в т. M_0

$\Rightarrow$ она непр-на в ~~этой~~ т. M_0 по каждой из перем-ых x и y (по x и по y)

Зам Обратное неверно

Δ Явл-ся элем-ым следствием опр-ий непр-ти по отдельным переменным и по совокупности перем-ых и остаётся в кач-ве самост-го упр-ия

Примеры

① $u(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & xy\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0\end{cases}$

Мы доопред-ли рассм-ую ранее ф-ию в т. $O(0,0)$

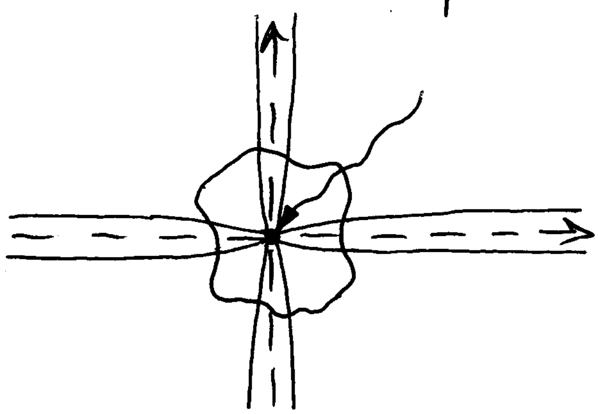
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\ (x^2+y^2\neq 0)}} u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0\equiv u(0,0)$$

$\Rightarrow u(x,y)$ непр-на в т. $O(0,0)$

Но эта ф-ия неопр-на на осях координат (кроме самого начала координат) $\Rightarrow$ она не явл-ся непр-ой по x и по y

Как этот вывод соотносится с утв-ем теоремы 6?

Дело в том, что для нашей ф-ии не существует никакой (даже очень маленькой) окр-ти, в которая целиком $\in$-ла бы обл-ти опр-ия ф-ии



② $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Здесь с обл-тью опр-ия всё хорошо (ф-ия опр-на на всей пл-ти E^2)

Сперва иссл-ем непр-ть $u(x,y)$ по отдельным переменным

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} u(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \equiv u(0,0) \overset{\text{ан-но}}{=} \lim_{y\to 0} (0,y)$$

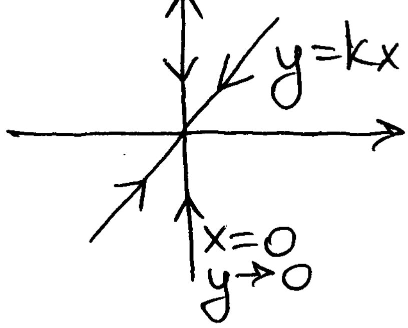
⇒ и непр-на по x и по y в т. $O(0,0)$ **3.3**

Но $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)=\varnothing$ (см. пример выше) ⇒

⇒ $u(x,y)$ не явл-ся непр-ой по совокупности перем-ых (т.е. разрывна) в т. $O(0,0)$

(3) $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

Легко убедиться в том, что

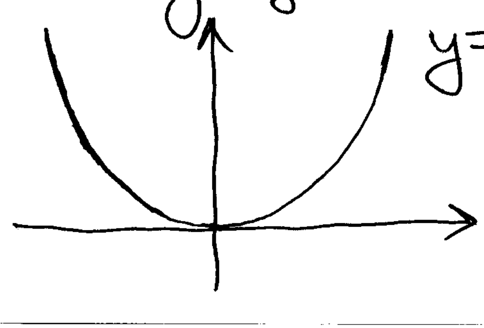


$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y)\underset{\substack{\uparrow\\ \forall k}}{=}\cancel{\lim\limits_{x\to 0}}\,0\equiv u(0,0)$

$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} u(x,y)=0\equiv u(0,0)$

⇒ $u(x,y)$ непр-на вдоль любой прямой $y=kx$ (для общности можно ещё рассм-ть предел вдоль прямой $x=0$)

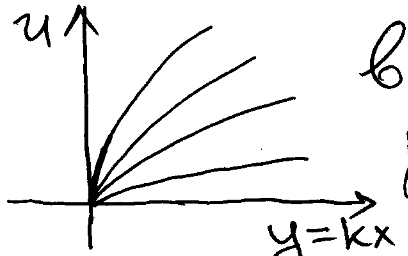
Но она не явл-ся "просто" непр-ой (непр-ой по совокупности перем-ых), т.к. "общего" ("двойного") предела $u(x,y)$ при $x,y\to 0$ не сущ-ет



$y=kx^2$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} u(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\,x^4}{x^4+k^2x^4}=$

$=\dfrac{k}{1+k^2}$ ← зависит от k

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \varnothing$, т.к. если бы он существовал, то равнялся одному и тому же числу при $\forall$ способе стремления к точке $O(0,0)$ (в том числе по всем параболам)



в сечении наклон (при $k\to 0$) все время растёт – отсюда и разрывность (при $y=kx$ ф-я $u \sim \frac{x}{k}$ в т. $x=0$).
$\Rightarrow$ $u(x,y)$ разр по $\{x,y\}$ в т. $O(0,0)$

Св-ва непрерывных ф-ий

Теор 7 (об арифметических операциях над непр-ми ф-ми)

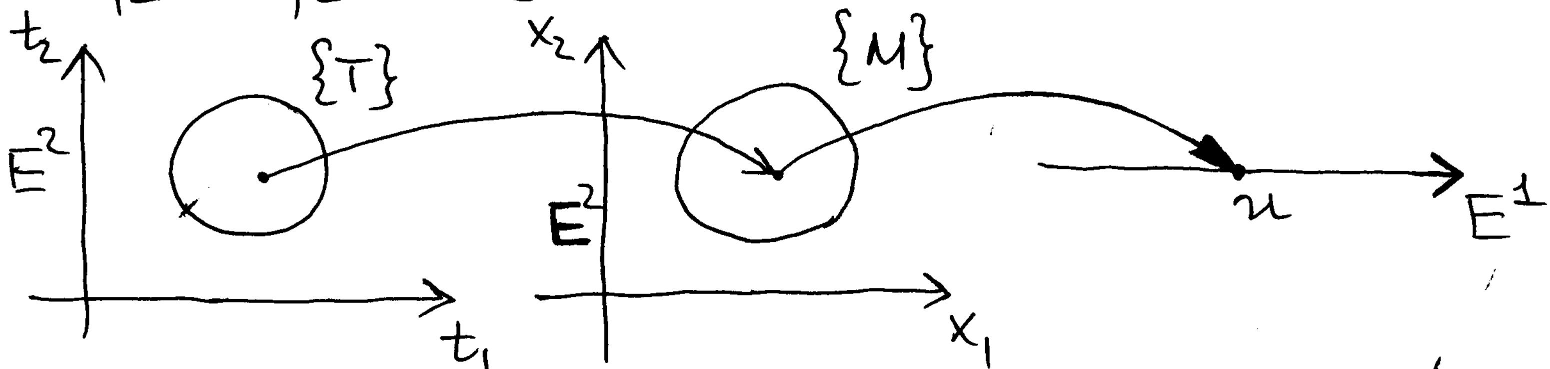
Задание. Сформулировать и док-ть теор.7

Введём понятие сложной ф-ии

Дополн-но:

Пусть ф-ии $x_1=\varphi_1(t_1,t_2)$, $x_2=\varphi_2(t_1,t_2)$:

$D_{\varphi_1}=D_{\varphi_2}\equiv\{T\}\subset E^2$



Тогда упорядоченная пара ф-ий $\{\varphi_1, \varphi_2\}$

определяет новую функцию Φ, которая каждой точке (t_1, t_2) мн-ва $\{T\} \subset E^2$ $\longmapsto$ упорядоченную пару чисел (x_1, x_2), которую мы будем воспринимать как точку некого (другого) евклидова пр-ва размерности 2: $(x_1, x_2) \in E^2$:

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \equiv \Phi : (t_1, t_2) \in \{T\} \xmapsto{\Phi} (x_1, x_2) \in E^2$$

$\{T\} \equiv D_\Phi$ – обл-ть опр-ия Φ

$\{M(x_1, x_2) \in E^2 \mid x_1 = \varphi_1(t_1, t_2), x_2 = \varphi_2(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in$
$\in D_\Phi\} \equiv E_\Phi$ – мн-во значений Φ

Ф-ию Φ принято называть вектор ф-ей или отображением мн-ва $\{T\}$ на мн-во $\{M\}$

Пусть теперь $u = f(M)$: $D_f = \{M\}$. Тогда
конец дополн-я
$u = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)) \equiv g(t_1, t_2)$ – сложная ф-ия арг-ов t_1 и t_2: $D_g = \{T\}$

Доп: Обозн $\underbrace{u = f(\underbrace{\Phi(T)}_{M})}_{\equiv f(\varphi_1(T), \varphi_2(T))} \equiv g(T)$

Мы определили сложную ф-ию: $E^2 \to E^2 \to E$

Анал-но опр-ся сложные ф-ии: $E^k \to E^m \to E$

(Разумеется, можно опр-ть и сложные вектор-ф-ии: $E^k \to E^m \to E^n$, $n > 1$, но мы ограничимся лишь скалярным случаем, т.е. сложными ф-ми u, знач-ми которых являются вещ-ые числа)

Теор 8 (о непр-ти сложной ф-ии) Пусть
1) ф-ии $\varphi_1(t_1, t_2)$ и $\varphi_2(t_1, t_2)$ непр-ны в т. $A(a_1, a_2)$
2) ф-я $f(x_1, x_2)$ непр-на в т. $B(b_1, b_2)$, где $b_1 = \varphi_1(a_1, a_2)$, $b_2 = \varphi_2(a_1, a_2)$
$\Rightarrow u = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2))$ непр-на в т. A

Зам Разум-ся, формулировка и док-во теоремы элементарно обобщ-ся на случай произвольного числа арг-ов как внутренних φ_i, так и внешней f ф-ий, образующих сложную ф-ию u

Δ Обобщить и док-ть самост-но

Теор 9 (об устойчивости знака непр-ой ф-ии)
Если $f(M)$ непр в т. A и $f(A) \geq 0$, то $\exists K_\delta(A)$, в которой $f(M) \geq 0$

Δ-ть сам-но

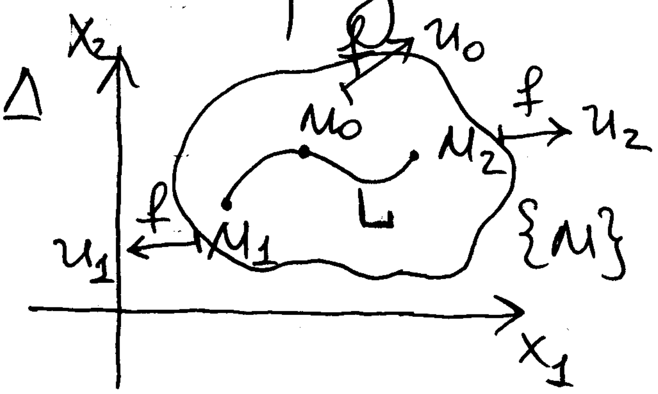
Теор 10 (о прохождении непр-ой ф-ии через $\forall$ промежуточное значение)

Пусть:

1) $u = f(M) = f(x_1, x_2)$ непр-на на связном мн-ве $\{M\}$
2) $f(M_1) \equiv u_1$, $f(M_2) \equiv u_2$, $M_1, M_2 \in \{M\}$
3) $u_0 \in [u_1, u_2]$

Тогда на $\forall$ непр-ой кривой $L \subset \{M\}$, соедин-щей тт. M_1 и M_2, найдётся т. M_0: $f(M_0) = u_0$

Зам В случае ф-ии одной перем-ой кривая L представляла собой отр-к оси x



Пусть $L = \{M(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ — наша непр-ая кривая. Напомню, что через M^t обозначается произвольная т-ка кривой L

$\Rightarrow M_1 = M^\alpha$, $M_2 = M^\beta$ — концы кривой

На кривой L ф-ию u можно рассм-ть как сложную ф-ию t:

$$t \in [\alpha, \beta] \xmapsto{\{\varphi_1, \varphi_2\}} M^t \in L \xmapsto{f} u(M^t) \in \mathbb{R},$$

т.е. получается, что $u = f(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t)}} =$

$= f(\underset{x_1}{\underset{\text{и}}{\varphi_1(t)}}, \underset{x_2}{\underset{\text{и}}{\varphi_2(t)}}) \equiv F(t)$ – сложная ф-ия t

По теор. 8 $F(t)$ непр-на в каждой т. $[\alpha, \beta]$, т.е. на всём $[\alpha, \beta]$, и, кроме того,

$F(\alpha) = f(M^{\alpha}) = f(M_1) = u_1$, $F(\beta) = u_2$

Тогда в силу теор о прохождении через все промежуточные зн-ия непр $\overset{\text{об}}{\text{ф-}}$ $\overset{\text{е}}{\text{ий}}$ одной переменной $F(t)$

$$\forall u_0 \in [u_1, u_2] \underset{\text{непр } F(t)}{\Longrightarrow} \exists t_0 \in [\alpha, \beta] : F(t_0) = u_0$$

Но $F(t_0) = f(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) = f(M(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) = f(M^{t_0})$,

где $M^{t_0} \equiv M_0 \in L$

Итак, $\exists$ т. $M_0 \in L : f(M_0) = F(t_0) = u_0$ чтд Δ

Задание. Обобщить док-во на случай ф-ии f произв-го числа арг-ов

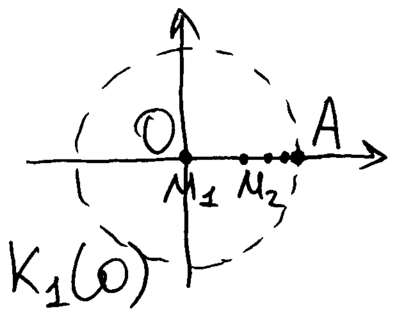
Далее нам понадобится лемма 3

Лемма 3 Пусть $\{M\}$ – замкнутое мн-во

Тогда $\forall \{M_n\} : \begin{cases} M_n \to A \\ M_n \in \{M\} \end{cases} \Rightarrow A \in \{M\}$

Д-ть сам-но

Зам В случае открытого мн-ва утв-ие леммы несправедливо



$\{M_n(1-\frac{1}{n}, 0)\}: M_n \to A(1,0) \notin K_1(O)$

А вот для $\overline{K}_1(O) \Rightarrow A(1,0) \in \overline{K}_1(O)$

Теор 11-12 (1-я и 2-я тт. Вейерштрасса)

Если ф-я $u = f(M)$ непр-на на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$, то она:

1) огр-на на этом мн-ве
2) достигает на нём своих точных граней

Зам Отрезок явл-ся одним из простейших частных случаев замкнутых огран-х мн-в

Опр-ия огр-ти ф-ии, точных граней, а также сами док-ва этих теорем полностью аналогичны одномерному случаю, в связи с чем их предлагается рассм-ть самост-но

Задание. Дать опр-я (вместе с отрицаниями) огр-ых ф-ий и точных граней и док-ть т-мы В-са (исп-я лемму 3)

Напомню только опр-ие точной верхней грани

Опр $\overline{u} = \sup\limits_{\{M\}} f(M)$, если

1) $\forall M \in \{M\} \Rightarrow f(M) \leq \overline{u}$

2) $\forall \tilde{u} < u \Rightarrow \exists \tilde{M} \in \{M\} : f(\tilde{M}) > \tilde{u}$

Равномерно непрер-ые ф-ии

Опр Мн-во $\{M\}$ наз всюду плотным в себе, если оно не содержит изол-х точек ($\Leftrightarrow \forall$т. $\{M\}$ – предельная)

Пусть $u = f(M)$: $D_f \equiv \{M\}$ всюду плотно в себе $\Rightarrow$ можно поставить вопрос о непр-ти ф-ии в каждой точке мн-ва $\{M\}$

Опр Ф-я $f(M)$ наз-ся непр-й на $\{M\}$, если она непр-на в каждой его точке

Опр Ф-я $u = f(M)$ наз-ся равном-но непр-ой на $\{M\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall M_1, M_2 : \begin{matrix} 1) M_1, M_2 \in \{M\} \\ 2) \rho(M_1, M_2) < \delta \end{matrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$$

Зам Равн непр $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Непр-ть

(убедитесь самост-но)

Теор 13 (Кантора)

Непрерывная на замкнутом огр-м мн-ве ф-ия равномерно непр-на на нём

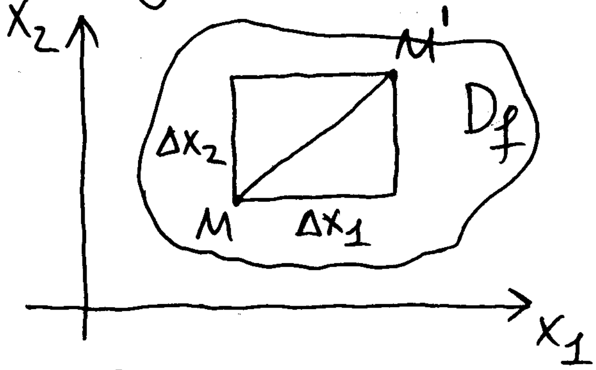
Д-ть сам-но!

Зам В конечномерных евклидовых пространствах E^n понятие замкнутого ограниченного мн-ва $\equiv$ понятию компактного мн-ва (и иногда для конечномерного случая компактное мн-во так и опред-ют, т.е. как замкнутое огр-ое мн-во)

Примеры выносятся на семинары

§5 Частные производные и дифференцируемость ф-ий

Пусть $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m) : D_f = \{M\}$



Рассм-м тт. $M(x_1, \dots, x_m)$, $M'(x_1+\Delta x_1, \dots, x_m+\Delta x_m) \in \{M\}$

фиксирована   произв-на

т.е. $x_1, \dots, x_m$ — фикс-ны

$\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ — произв-ны

Пусть, кроме того, М – внутр т-ка $\{M\}$

$\Rightarrow$ M' может $\to$ М вдоль каждой из координатных осей

Напомню, что

$$\Delta_{x_k} u (\Delta x_k) \equiv f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

– частное приращение по перем-ой x_k

Поскольку M' может $\to$ к М вдоль каждой из ~~коор~~ осей, то частное прир-ие $\Delta_{x_k} u$ опр-но при всех дост-но малых Δx_k, а значит мы можем ставить вопрос о сущ-ии

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} \cancel{= ?}$$

Опр 1 Если сущ-ет $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$, то он наз-ся частной производной ф-ии $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в т. М по переменной x_k

Обозн $u'_{x_k}(M)$, $u_{x_k}(M)$, $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M)$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(M)$ и т.д.

Из опр-ия производной ф-ии одной переменной вытекает

Опр 2 $\frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_m) \equiv$

$$\equiv \underset{\text{„обычная“ производная}}{\frac{d}{dx}} f(\underbrace{x_1, \dots, x_{k-1}}_{\text{const}}, x, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_m}_{\text{const}})\Big|_{x = x_k}$$