§4 Непрер-сть ф-ии

Пусть $u = f(M)$: $D_f = \{M\} \subset \mathbb{R}^m$ и пусть $A \in \{M\}$ – пред. т. $\{M\}$

Опр Ф-я $f(M)$ наз непр в т. A, если $\lim\limits_{M \to A} f(M) = f(A)$

Опр Т. A наз т. разр ф-ии $f(M)$, если

1) A – пред. т. $\{M\}$ (может $\notin \{M\}$)

2) $f(M) \not\to f(A)$ при $M \to A$

$\Delta u(M) \equiv \underset{\text{перем}}{f(M)} - \underset{\text{фикс}}{f(A)}$ – прир-ие (полное) ф-ии u в т. A

~~Тогда непр-ть~~ Разн-ая форма усл-я непр в т. A:

$$\lim_{M \to A} [f(M) - f(A)] \equiv \boxed{\lim_{M \to A} \Delta u = 0}$$

Рассм т.т. $M(x_1, \dots, x_m)$, $A(a_1, \dots, a_m)$

$\Delta x_i \equiv x_i - a_i \quad \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow x_i = a_i + \Delta x_i \Rightarrow$

прир-я арг-в

$\Rightarrow M(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) \Rightarrow$

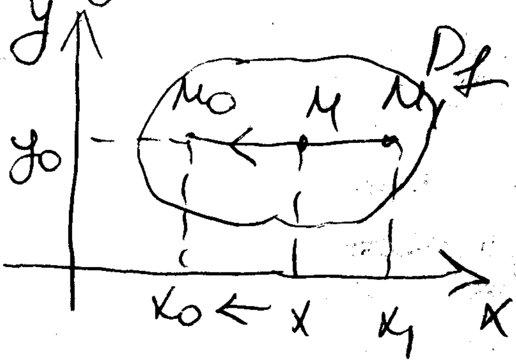
$\Rightarrow \Delta u \equiv f(M) - f(A) = f(a_1+\Delta x_1, \dots, a_m+\Delta x_m) -$

$- f(\underbrace{a_1, \dots, a_m}_{\text{фикс}}) = \Delta u(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$

$$\boxed{\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0}$$ — усл-ие непр-ти

Непр-ть по отд-ым пер-м

Пусть $u = f(M) = f(x,y)$: $D_f \supset [M_0, M_1] \parallel$ оси OX (для наглядности)



Зафикс-м $y = y_0$

$\Rightarrow f(\underset{\text{перем}}{x}, y_0) \equiv \varphi(x) : D_\varphi \supset [x_0, x_1]$

Опр Ф-я ~~…~~ $f(x,y)$ наз непр в т. $M_0(x_0,y_0) \in D_f$ по перем x, если ф-я $f(x, y_0)$ одной перем x непр в т. $x = x_0$

$\Delta_x u(\Delta x) \equiv \Delta u(\Delta x, 0) = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$

— частное прир-ие ф-ии u в т. M_0 ~~отв-ее прир-ю Δx~~ по перем x

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0}$$ — разн-я форма усл-я непр по перем x

(Непр-ть по перем y опр-ся анал-но ан-но)

Теор 6 Если ф-я $f(x,y)$:

1) огр-на в нек-й окр т. $M_0(x_0, y_0)$

(т.е. M_0 – внутр т. D_f)

2) непр в т. M_0 $\equiv$ непр по ~~вектору~~ сов-ти пер-х $\{x,y\}$

$\Rightarrow$ она непр в т. M_0 по x и по y

Зам Обр неверно

Δ ~~y~~ $\Rightarrow$ y огр-й непр по x, y и по $\{x,y\}$

– Δ-ть сам-но

~~Пример~~

① $u(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\ (x^2+y^2\neq 0)}} u(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0 = u(0,0)$$

$\Rightarrow u(x,y)$ непр в т. $O(0,0)$

т.к. $u(x,y)$ неопр на осях OX и OY (кроме т. O) $\Rightarrow$ разр по x и по y в т. O

(Теор 6 не работает, т.к. нарушено усл-е 1)

② $u(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ $\quad D_u \equiv E^2$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\neq 0)}} u(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \equiv u(0,0) = \underset{\text{ан-но}}{\lim_{y\to 0}} u(0,y)$$ 3.4

$\Rightarrow u$ непр по x и по y в т. $O(0,0)$

Но $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \not\exists$ {см. выше}

$\Rightarrow u$ ~~(x,y)~~ разр по $\{x,y\}$ в т. O

(3) $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y) = 0 \equiv u(0,0)$$

$\forall k$ (д-во сам-но)

($\Rightarrow u$ непр вдоль $\forall$ прямой $y=kx$)

Но $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} u(x,y) = \cancel{\lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}} = \frac{k}{1+k^2} = f(k)$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \not\exists \Rightarrow u$ разр по $\{x,y\}$ в т. $O(0,0)$

Св-ва непрер-ых ф-ий

Теор 7 (об арифм опер над непр ф-ми)

Сформ-ть и д-ть сам-но

$u = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)) \equiv g(t_1, t_2)$ – сложная ф-ия t_1 и t_2

$u: E^2 \to E^2 \to E^1$ (ан-но $E^k \to E^m \to E^1$)

Теор 8 (о непр-ти сл-й ф-ии) Пусть:

1) $\varphi_1(t_1, t_2)$ и $\varphi_2(t_1, t_2)$ непр в т. $A(a_1, a_2)$

2) $f(x_1, x_2)$ непр в т. $B(b_1, b_2)$, где $b_1 = \varphi_1(a_1, a_2)$, $b_2 = \varphi_2(a_1, a_2)$

$\Rightarrow u = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2))$ непр в т. A

Обобщ и Д-во сам-но

Теор 9 (об устойч-ти знака непр ф-ии)

Если $f(M)$ непр в т. A и $f(A) \lessgtr 0$, то $\exists\, O_\delta(A)$, в кот $f(M) \lessgtr 0$

Д-во сам-но

Теор 10 (о прох-ии непр ф-ии через $\forall$ пром-ое зн-ие)

Пусть:

1) $u = f(M) = f(x_1, x_2)$ непр на связном мн-ве $\{M\}$

2) $u_1 = f(M_1)$, $u_2 = f(M_2)$, $M_1, M_2 \in \{M\}$

3) $u_0 \in [u_1, u_2]$

3.6

Тогда на $\forall$ непр кривой $L \subset \{M\}$, соед-й тт. M_1 и M_2, най-ся т. M_0: $f(M_0)=u_0$

(В случае 1-го арг-та L = отр оси x)

Δ

Пусть $L =$

$= \{M(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$

M^t – произв т. $L \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1 = M^\alpha$, $M_2 = M^\beta$

На кривой L ф-я u – сл-я ф-я t:

$t \in [\alpha, \beta] \xmapsto{\varphi_1, \varphi_2} M^t \in L \xmapsto{f} u(M^t) \in E^1$, т.е.

$u = f(x_1, x_2) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = f(M^t) \equiv F(t)$

По теор 8 $F(t)$ непр в $\forall$ т. $[\alpha, \beta]$, т.е. непр на $[\alpha, \beta]$ и $F(\alpha) = f(M^\alpha) = f(M_1) = u_1$, $F(\beta) = u_2$. Тогда

$$\forall u_0 \in [u_1, u_2] \underset{\text{непр } F(t)}{\Rightarrow} \exists t_0 \in [\alpha, \beta] : F(t_0) = u_0$$

Но $F(t_0) = f(M^{t_0})$, где $M^{t_0} \equiv M_0 \in L$

Итак, $\exists$ т. $M_0 \in L$: $f(M_0) = F(t_0) = u_0$ $\not\Delta$

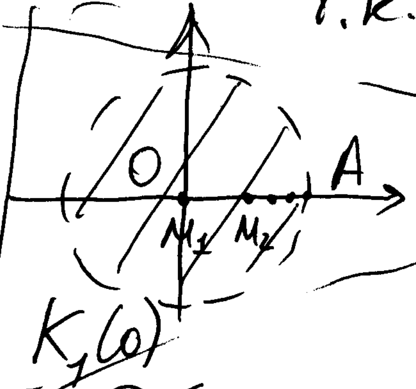
(Обобщу Δ-во на случай ф-ии f произв числа арг-в)

Лемма 3 Пусть $\{M\}$ — замкн мн-во

Тогда $\forall \{M_n\}: \begin{cases} M_n \to A \\ M_n \in \{M\} \end{cases} \Rightarrow A \in \{M\}$

Δ-~~во очев-но~~ ⇒ у огр замкн мн-ва $\forall$ т-ка — пред-я)

~~Зам~~ (Для откр-го мн-ва в-но неверно, т.к. оно ~~сод-ит~~ может не все свои пр-ые т-ки



$\{M_n(1-\frac{1}{n}, 0)\}: M_n \to A(1,0) \notin K_1(0)$

Но $A \in \bar{K}_1(0)$)

Теор 11-12 (1-я и 2-я тт. В-са)

Если ~~ф-я~~ $f(M)$ непр на замкн огр-м мн-ве $\{M\}$, то она:

1) огр на этом мн-ве

2) дост-ет на нём своих точных граней

(Отр-к одно у прост-их замкн огр мн-в)

Зад-ие Сформ-ть опр-я (с отр-ми) огр-х ф-й и точных граней и Δ-ть т-мы В-са (исп-я лемму 3)

Равном-но непр-ые ф-ии

Опр Мн-во ~~{M}~~ наз всюду плотным в себе, если оно не сод-ит изол-х т-к ($\Leftrightarrow \forall$ его т-ка — пред-я)

Пусть $u = f(M)$: $D_f \equiv \{M\}$ — всюду плотно в себе

Опр Ф-я $f(M)$ наз непр на $\{M\}$, если она непр в к-ой его т-ке

Опр Ф-я $f(M)$ наз равн-но непр на $\{M\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall M_1, M_2 : \begin{cases} M_1, M_2 \in \{M\} \\ \rho(M_1, M_2) < \delta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$$

Зам Равн непр $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Непр (Д-ть сам-но)

Теор 13 (Кантора) Непр-я на замкн-м огр-м мн-ве ф-я равн непр ~~на~~ на нём

Д-ть сам-но (Примеры — на семинары)

~~§5 Частные произв-ые и дифф-ть ф-ий~~

Пусть ~~$u = f(M) = f(x_1, x_2)$: $D_f = \{M\}$~~