Лекция 4

Примеры

① $u = x^y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d}{dx} x^y \Big|_{y=\text{const}} = \left\{ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \right\} = y x^{y-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d}{dy} x^y \Big|_{x=\text{const}} = \left\{ (a^y)' = a^y \ln a \right\} = x^y \ln x$$

② $u(x,y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \leftarrow \text{на осях координат} \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$

$$\Delta_x u = u\underbrace{(\Delta x, 0) - u(0,0)}_{\text{на осях координат}} = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow u_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{0}{\cancel{\Delta_x u}}}{\Delta x} = 0 = \underset{\text{ан-но}}{u_y(0,0)}$$

Но при этом $u(x,y)$ разрывна в т. $O(0,0)$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \Delta u = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\underset{0}{u(\Delta x, \Delta x)} - \underset{-1}{u(0,0)} \right] = -1 \neq 0$$

(см. разностное усл-ие непр-ти)

Т.о., сущ-ие частных произв-ых $\not\Rightarrow$ Непр-ть
$\not\Leftarrow$ (и наоборот тоже)

③ $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ — убедитесь, сам-но, что ф-я u

явл-ся непр-й в т. $O(0,0)$, но ЧП-ые в этой точке у неё не сущ-ют

Физ смысл $u_{x_k}(M)$ – скорость изменения ф-ии в т. M в напр-ии оси OX_k

Рассм-м теперь полное приращение ф-ии

$$\Delta u\big|_M \equiv f(M') - f(M) = f(x_1+\Delta x_1, \dots, x_m+\Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

(M – по-прежнему внутренняя точка)

Опр 1 Ф-ия $u = f(x_1, \dots, x_m)$ наз-ся диффер-ой в т. $M(x_1, \dots, x_m)$, если её приращ-ие в этой т-ке представимо в виде

$$\Delta u\big|_M = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m, \quad (I)$$

где $A_i = \text{const}$ (незав от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$), $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ – б.м. ф-ии при $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \to 0$ и $\alpha_i(0, \dots, 0) = 0$

Зам 1 Рав-во (I) наз-ся усл-ем диф-ти ф-ии u в т. $M(x_1, \dots, x_m)$

Зам 2 $\lim\limits_{M \to O} \alpha_i = 0 = \alpha_i(0, \dots, 0)$, т.е. α_i – непр-ны в т. $O(0, \dots, 0)$ – это требование не обязат-но, но очень удобно при док-ве теоремы о диф-ти сложной ф-ии, поэтому мы его принимаем (разум-ся, его добавление, также как и в случае диф-ф-ых ф-ий одной перем-ой, существа оп-р-ия не меняет)

При $m=1$ (ф-ия одной перем-ой) усл-ие (I) принимает вид

$$\Delta u = \underbrace{A_1 \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x}_{(1)} = \underbrace{A \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x)}_{(2)},$$

Напомню, что A = лось производной $u'(x)$. Забегая вперёд, отмечу, что в случае ф-ии многих переменных константы A_i вполне ожидаемо =ются соотв-м частным произ-в-ым ф-ии u

Пока же мы зададимся следующим вопросом: можно ли усл-ие диф-ти (2) ф-ии одной перем-ой обобщить на случай многих переменных (подобно условию (1)) ?

Оказывается, можно

Заметим, что $\bar{\bar{o}}(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(|\Delta x|)$ и что в случае ф-ии одной перем-ой $|\Delta x|$ играет роль расстояния между т-ми $M(x)$ и $M'(x+\Delta x)$:

$m=1 \Rightarrow M(x), M'(x+\Delta x) \Rightarrow |\Delta x| = \rho(M, M')$
$(u=u(x))$

В общем случае $(m>1)$

$$\rho(M, M') = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} = \rho(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{o}}(\Delta x) \xrightarrow[\text{должно переходить в}]{m>1} \bar{\bar{o}}(\rho) = \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}\right)$$

Опр 2 Ф-я $u = f(M)$ наз-ся диф-ой в т. M, если

$$\Delta u|_M = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m), \quad (\mathrm{II})$$

где $\alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) = \bar{\bar{o}}(\rho)$ при $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \to 0$

Зам 1 $\rho \to 0 \equiv \begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \text{— и —} \\ \Delta x_m \to 0 \end{cases} \equiv M' \to M$

Зам 2 $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0 \Rightarrow \Delta u = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha(0, \dots, 0) = 0$$

Лемма 4 Опр 1 $\Leftrightarrow$ Опр 2

Δ 1) Опр 1 $\Rightarrow$ Опр 2 (проще)

Мы знаем, что

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \underbrace{\alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m}_{\equiv\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_m)}$$

Нужно убедиться, что

$$\alpha \equiv \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m = \bar{\bar{o}}(\rho)$$

Действ-но

$$\gamma(\Delta x_1,\dots,\Delta x_m) \equiv \frac{\alpha}{\rho} \equiv \frac{\alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}} =$$

$$= \underset{\text{б.м.}}{\alpha_1}\underbrace{\overbrace{\frac{\Delta x_1}{\sqrt{}}}^{|\,|\le 1}}_{\text{огр}} + \dots + \underset{\text{б.м.}}{\alpha_m}\underbrace{\overbrace{\frac{\Delta x_m}{\sqrt{}}}^{|\,|\le 1}}_{\text{огр}} = \text{б.м.} \times \text{огр} + \dots +$$

$+\,$б.м. $\times$ огр $=$ б.м. при $\rho \to 0$

$\Rightarrow \alpha = \bar{\bar{o}}(\rho)$ при $\rho \to 0$ чтд (Δ1)

Δ2) Опр 1 $\Leftarrow$ Опр 2 (чуть сложнее)

Мы знаем, что

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha, \text{ где } \alpha = \bar{\bar{o}}(\rho)$$

Нужно убедиться, что α представимо в виде

$$\alpha = \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m, \text{ где } \alpha_i \to 0 \text{ при } \rho \to 0$$

и $= 0$ при $\rho = 0$ $(\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0)$

Действ-но при $\rho \neq 0$ (зам, что если $\rho \to 0$, то $\rho \neq 0$)

$$\alpha = \frac{\alpha}{\rho}\frac{\rho^2}{\rho} = \frac{\alpha}{\underset{\text{б.м.}}{\rho}} \overbrace{\frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}{\rho}}^{\text{огр}} =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\alpha}{\rho}\frac{\Delta x_1}{\rho}\right]}_{\equiv \alpha_1} \Delta x_1 + \dots + \underbrace{\left[\frac{\alpha}{\rho}\frac{\Delta x_m}{\rho}\right]}_{\equiv \alpha_m} \Delta x_m =$$

$$= \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \text{ где } \alpha_i \equiv \begin{cases} \frac{\alpha}{\rho}\frac{\Delta x_i}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ 0, & \rho = 0 \end{cases}$$

Тогда $\alpha_i = \underbrace{\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\Delta x_i}{\rho}}_{\text{огр}} \to 0$ при $\rho \to 0$; $= 0$ при $\rho = 0$, $\forall i = \overline{1, m}$

чтд Δ 2)

Сформулируем утв-ие о связи диф-сти с непр-тью и сущ-ем частных произв-ых

Теор 14 (необх-ые усл-я диф-ти)

Диф-ть в т. M $\underset{\not\Leftarrow}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}}$ Непр-ть в т. M

Диф-ть в т. M $\underset{\not\Leftarrow}{\overset{(2)}{\Longrightarrow}}$ $\exists$-ие частных произв-х в т. M

(1) - ситуация ан-на одномерному случаю

(2) - ситуация отлична от одномерного случая (см. зам. 2 после док-ва)

~~Δ Диф-ть $\Rightarrow$ непр-ть~~

Зам Тем самым непр-ть и сущ-ие част-

нужных произв-ных
~~В самом деле~~ являются необх-ми усл-ми диф-ти: ф-я разр-на или хотя бы одна частн пр-я $\nexists$ $\Rightarrow$ не диф-ма

Δ Диф-ть $\Rightarrow$ непр-ть

В самом деле, согласно усл-ию (II) диф-ти ф-ии в т. M

$$\Delta u\Big|_M = \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{A_1\Delta x_1} + \dots + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{A_m\Delta x_m} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\bar{\bar{o}}(\rho)} \text{ при } \rho\to 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \text{и}\\ \Delta x_m\to 0}} \Delta u\Big|_M = 0 \Rightarrow$$ (см. разностную форму усл-я непр-ти)

ф-я $u = f(M)$ непр-на в т. M $\cancel{\Delta}$1)

Δ2) Диф-ть $\Rightarrow$ $\exists$ всех част-х произв-х

Согласно усл-ию (I) диф-ти ф-ии в т. M

$$\Delta u\Big|_M = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m$$

Пусть $\forall i\neq k \Rightarrow \Delta x_i = 0$, а $\Delta x_k \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho = |\Delta x_k| \Rightarrow [\rho\to 0 \Leftrightarrow \Delta x_k \to 0]$

Тогда $\Delta u\Big|_M = \Delta_{x_k} u\Big|_M = A_k\Delta x_k + \alpha_k\Delta x_k$

$\Rightarrow \left.\dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}\right|_M = A_k + \underset{\downarrow 0}{\alpha_k} \to A_k$ при $\rho \to 0$, т.е. при $\Delta x_k \to 0$

Т.о. $\exists \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \left.\dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}\right|_M \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M) = A_k$ $\cancel{\Delta}$ 2)

Зам 1 Из ~~д~~ док-ва второй части теоремы видно, что

$\forall k = \overline{1,m} \Rightarrow A_k = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M)$,

а значит условие диф-ти можно переписать в виде

$$\Delta u|_M = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \qquad (\mathrm{III})$$

Зам 2 В случае ф-ии 1-ой перем-ой $u = u(x)$: Диф-ть $\Longleftrightarrow$ Сущ-ию произв-ой.

В случае ф-ии многих перем-ых $u = u(x_1, \dots, x_m)$, $m > 1$ ситуация более сложная: Диф-ть $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\exists$-ие частных произв-х

Рассм-м ещё раз пример 2

② $u(x,y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$

Мы уже убедились, что

1) $u(x,y)$ разр-на в т. $O(0,0) \overset{\text{теор 14}}{\Longrightarrow}$ не диф-ма в т. $O(0,0)$

В то же время мы также убедились в том, что

2) $u_x(0,0) = u_y(0,0) = 0$

Итак, u_x и u_y сущ-ют в т. $O(0,0)$, но ф-ия $u(x,y)$ не диф-ма в этой точке

Иссл-ие ф-ии на диф-ть с помощью опр-ия диф-ти иногда представляет собой весьма трудоёмкую задачу, поэтому полезно иметь необх-ые и/или дост-ые усл-ия диф-ти

Необходимые усл-я у нас уже были — это непр-ть и сущ-ие частных произв-ых. Теперь приведём достаточное усл-ие диф-ти

Подчеркну, что мы по-прежнему считаем, что M — внутр-яя точка обл-ти опр-ия

Теор 15 (дост-ое усл-ие диф-ти)

Если ф-ия $u = f(x_1, \ldots, x_m)$:

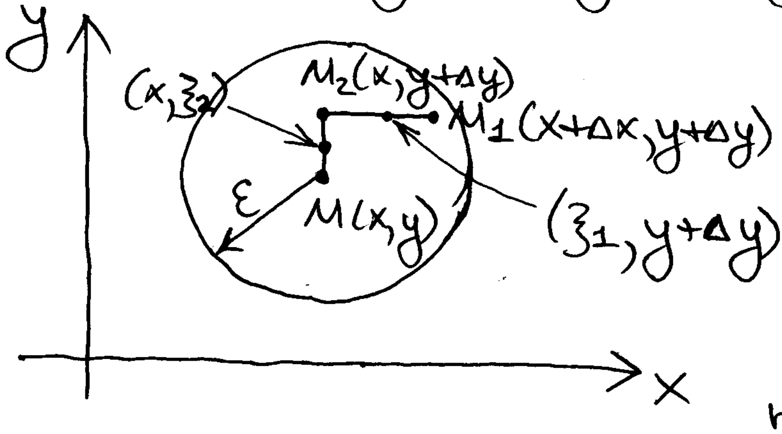
1) имеет все ч-ые пр-ые в нек-й окр-ти т. M

2) все ч-ые пр-ые непр в т. M

$\Rightarrow$ ф-ия u диф в т. M

Δ Док-ем для случая двух перем-ых: $\boxed{4.10}$

$u = f(x,y)$



Пусть f_x и f_y сущ-ют в $O_\varepsilon(M)$ и пусть

$\Delta x, \Delta y$: $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y) \in O_\varepsilon(M)$

настолько малы, что

Рассм-м приращ-ие $\Delta u|_M$

$$\Delta u|_M \equiv f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) =$$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] =$$

применяем ф-лу Лагранжа к ф-ии f и переменной x ($y+\Delta y \equiv const$) — считаем равным

к ф-ии f и пер-ой y ($x \equiv const$)

∃-ют (см. усл-ие **1** теоремы)

$$= f'_x(\underbrace{x+\theta_1\Delta x}_{=\xi_1\in(x,\,x+\Delta x)},\, y+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x,\, \underbrace{y+\theta_2\Delta y}_{=\xi_2\in(y,\,y+\Delta y)})\cdot\Delta y, \qquad \mathbf{(1)}$$

где $\theta_1=\theta_1(\Delta x,\Delta y)$, $\theta_2=\theta_2(\Delta y)$: $0<\theta_i<1$, $i=\overline{1,2}$

Подчеркну, что f'_x и f'_y сущ-ют всюду в $O_\varepsilon(M)$, а значит и на отр-х MM_2 и M_2M_1, поэтому применение теоремы Лагранжа к ф-ии f на этих отр-ах заведомо возможно (т.о. мы задействовали усл-ие 1 доказываемой теоремы)

Теперь воспользуемся условием 2

Т.к. f'_x и f'_y непр-ны в т. $M(x,y)$, то

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x+\theta_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x,\ y+\Delta y) =$

в случае многих переменных этот принцип также работает

$\theta_1(\Delta x,\Delta y)$ не опр-на в т. $O(0,0)$ (но и не надо)

$= f'_x\Big(\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}[x+\underbrace{\theta_1(\Delta x,\Delta y)}_{\text{огр.}}\underbrace{\Delta x}_{\text{б.м.}\ \to 0}],\ \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}[y+\underbrace{\Delta y}_{\to 0}]\Big) = f'_x(x,y)$

$$\Rightarrow f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y)+\alpha_1(\Delta x,\Delta y), \quad (2)$$

где $\alpha_1(\Delta x,\Delta y) \to 0$ при $\Delta x,\Delta y \to 0$
$= 0$ при $\Delta x,\Delta y = 0$

Ан-но

$$f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x,y)+\alpha_2(\Delta y),$$

где $\alpha_2(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$
$= 0$ при $\Delta y = 0$

Будем формально считать, что

$$\alpha_2(\Delta y) = \alpha_2(\Delta y)+0\cdot\Delta x \equiv \alpha_2(\Delta x,\Delta y), \quad (3)$$

где $\alpha_2(\Delta x,\Delta y) \to 0$ при $\Delta x,\Delta y \to 0$
$= 0$ при $\Delta x,\Delta y = 0$

Подставляя (2) и (3) $\to$ 1, имеем

$$\Delta u|_M = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

т.е. выполнено условие (III) диф-ти ф-ии

$\Rightarrow \Delta u$ диф в т. M чтд $\not\Delta$

Задание. Обобщить док-во на случай ф-ии m переменных

(4) $u(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Задание. Док-ть, что $u(x,y)$ диф-ма в т. $O(0,0)$, имеет ч-ые пр-ые на всей пл-ти, но эти частные пр-ые разр-ны в т. $O(0,0)$

Этот пример показывает, что усл-ия теоремы носят лишь дост-ый хар-р (тем не менее теорема полезна, ибо данный пример весьма экзотичен, а в большинстве случаев диф-х ф-ий, с которыми обычно сталкиваются на практике, она может быть применена)

Подробное рассм-ие примеров иссл-ия на диф-ть выносится на семинарские занятия