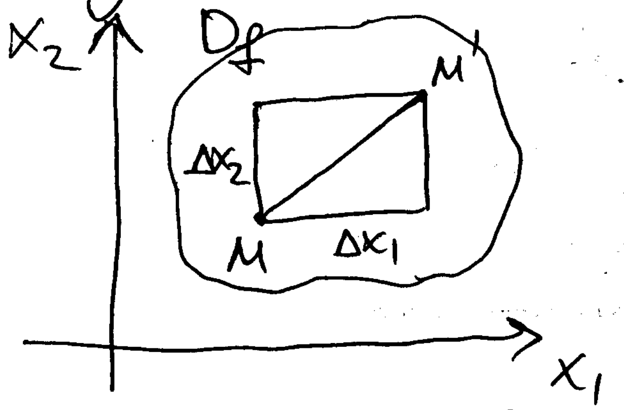
§5 Частные произв-ые и дифф-ть ф-ий

Пусть $u = f(M) = f(x_1, x_2)$: $D_f = \{M\}$



Рассм т-ки

$M(x_1, x_2)$, $M'(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) \in \{M\}$

фикс произв

Пусть M – внутр т. $\{M\}$

$\Rightarrow M'$ может $\to M$ вдоль Ox_1 и Ox_2

Нап, что $\Delta_{x_1} u(\Delta x_1) \equiv f(x_1+\Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)$

(- частное приращ по пер-й x_1)

Опр 1 Если сущ $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} u}{\Delta x_1}$, то он наз частной ~~произв~~ пр-ой ф-ии $u = f(x_1, x_2)$ в т. M по пер-й x_1

Обозн $u'_{x_1}(M)$, u_{x_1}, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, f_{x_1} и т.д.

Из опр 1 и опр пр-й ф-ии 1-й пер-й $\Rightarrow$

Опр 2 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \equiv \frac{d}{dx} f(x, \underset{\text{const}}{x_2}) \Big|_{x=x_1}$

"обычная" пр-ая

(Пр-я по пер-й x_2 опр-ся полн-ю ан-но)

① $u = x^y \quad (x_1 \to x,\ x_2 \to y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d}{dx} x^y \Big|_{y=const} = \left\{ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \right\} = y x^{y-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d}{dy} x^y \Big|_{x=const} = \left\{ (a^y)' = a^y \ln a \right\} = x^y \ln x$$

② $u = \begin{cases} 1, & xy = 0 \text{ (на осях к-т)} \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$

$$\Delta_x u(\Delta x)\Big|_{O(0,0)} \equiv u(\Delta x, 0) - u(0,0) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow u_x(0,0) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = 0 \underset{\text{ан-но}}{=} u_y(0,0)$$

Зам, что u разр в т. $O(0,0)$, т.к.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \Delta u \Big|_0 = \lim_{\Delta x \to 0} [\underbrace{u(\Delta x, \Delta x)}_{0} - \underbrace{u(0,0)}_{1}] = -1 \neq 0$$

Т.о. $\exists$ ЧП $\not\Leftrightarrow$ Непр-ть

③ $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ – д-те, что непр в т. $O(0,0)$, но ЧП $\nexists$ в т. O

(Фи смысл u_x – скор изм-я ф-ии в напр OX)

Рассм полное ~~приращ~~ пр-ие

$$\Delta u \Big|_M \equiv f(M') - f(M) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, y_1)$$

Опр 1 Ф-я $u = f(x_1, x_2)$ наз дифф в т. $M(x_1, x_2)$, если

$$\Delta u\Big|_M = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \overbrace{\alpha_1\Delta x_1}^{\bar{\bar{o}}(\Delta x_1)} + \overbrace{\alpha_2\Delta x_2}^{\bar{\bar{o}}(\Delta x_2)}, \qquad (\mathrm{I})$$

где $A_i = const$ (независ от Δx_i), $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \Delta x_2)$ – б.м. ~~ф-ии~~ при $\Delta x_1, \Delta x_2 \to 0$ и $\alpha_i(0,0) = 0$

Зам $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \alpha_i = 0 = \alpha_i(0,0)$ – непр в т. $O(0,0)$

Нап, что для $u = u(x)$

$$\Delta u\Big|_{x} = \underset{u'(x)}{A}\Delta x + \underbrace{\alpha\Delta x}_{\bar{\bar{o}}(\Delta x)} = \cancel{A_1\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)}$$

Опр 2 Ф-я $u = f(M)$ наз диф в т. M, если

$$\Delta u\Big|_M = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \underbrace{\alpha\cdot\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}_{\bar{\bar{o}}(\rho)}, \quad \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2} \equiv \rho \qquad (\mathrm{II})$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \Delta x_2)$ – б.м. при $\Delta x_1, \Delta x_2 \to 0$

~~Зам $\left.\begin{matrix}\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \rho \to 0 \Leftrightarrow M' \to M$~~ ~~оставить~~

(Для $u(x_1) \Rightarrow \bar{\bar{o}}(\sqrt{\Delta x_1^2 + \cancel{\Delta x_2^2}}) \to \bar{\bar{o}}(\Delta x_1)$)

Лемма 4 Опр 1 $\Leftrightarrow$ Опр 2

Δ 1) Опр 1 $\Rightarrow$ Опр 2

Мы знаем, что

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \overbrace{\frac{\alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}}^{\equiv\alpha(\Delta x_1, \Delta x_2)}\sqrt{\quad}$$

Надо д-ть, что $\alpha = \bar{\bar{o}}(\cancel{\rho})$, $\rho \to 0$ — б.м. при $\Delta x_1, \Delta x_2 \to 0$ 4.4

$$\cancel{\alpha = \frac{\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}} \quad \alpha = \underset{\text{б.м.}}{\alpha_1} \underbrace{\overset{\text{огр}}{\left(\frac{\Delta x_1}{\sqrt{\ }}\right)}}_{|\,| \le 1} + \underset{\text{б.м.}}{\alpha_2} \underbrace{\overset{\text{огр}}{\left(\frac{\Delta x_2}{\sqrt{\ }}\right)}}_{|\,| \le 1} \to 0, \ \cancel{\rho \to 0}, \ \Delta x_1, \Delta x_2 \to 0$$

$\cancel{\Rightarrow \alpha = \bar{\bar{o}}(\rho), \ \rho \to 0}$ ▲1)

Δ2) Опр 1 ⇐ Опр 2

Мы знаем, что

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \alpha \cdot \rho \ \cancel{\alpha = \bar{\bar{o}}(\rho)}, \ \rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$$

Надо д-ть, что $\alpha \cdot \rho = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2$,

где $\alpha_i \begin{matrix} \to 0, \ \cancel{\rho \to 0} \ \Delta x_1, \Delta x_2 \to 0 \\ = 0, \ \cancel{\rho = 0} \qquad\quad = 0 \end{matrix}$

Пусть $\rho \ne 0 \Rightarrow \alpha \cdot \rho = \alpha \frac{\rho^2}{\rho} =$

$$= \alpha \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}{\rho} = \underbrace{\left[\overset{\text{б.м. огр}}{\alpha \frac{\Delta x_1}{\rho}}\right]}_{\equiv \alpha_1} \Delta x_1 + \underbrace{\left[\overset{\text{б.м. огр}}{\alpha \frac{\Delta x_2}{\rho}}\right]}_{\equiv \alpha_2} \Delta x_2 =$$

$$= \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2, \ \text{где } \alpha_i \equiv \begin{cases} \alpha \frac{\Delta x_i}{\rho}, & \rho \ne 0 \\ 0, & \rho = 0 \end{cases}$$

Тогда $\alpha_i \begin{matrix} \to 0, \ \cancel{\rho \to 0} \ \Delta x_1, \Delta x_2 \to 0 \\ = 0, \ \cancel{\rho = 0} \qquad\quad = 0 \end{matrix}$ ▲2)

Теор 14 (необх усл-я диф-ти)

Диф-ть в т. M $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Непр-ть в т. M (отличие от одном-го случая)

$\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ ∃-ие ЧП в т. M

4.5

Δ1) Диф ⟹ Непр

~~Согласно (II)~~

$$\Delta u|_M \overset{(II)}{=} A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \bar{\bar{o}}(\rho) \to 0, \quad \Delta x_1, \Delta x_2 \to 0$$

(каждое слагаемое $A_1\Delta x_1 \to 0$, $A_2\Delta x_2 \to 0$, $\bar{\bar{o}}(\rho) \to 0$)

⟹ u непр в т. M ∅1)

Δ2) Диф ⟹ ∃ЧП

~~Согласно (I)~~

$$\Delta u|_M \overset{(I)}{=} A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2$$

Пусть $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = 0$

$$\Rightarrow \Delta u|_M \equiv \Delta_{x_1} u|_M = A_1\Delta x_1 + \alpha_1\Delta x_1$$

$$\frac{\Delta_{x_1} u}{\Delta x_1} = A_1 + \underset{\to 0}{\alpha_1} \to A_1, \quad \Delta x_1 \to 0$$

⟹ сущ $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M) = A_1$ (Ан-но $\frac{\partial u}{\partial x_2}(M) = A_2$) ∅2)

Зам $\Delta u|_M = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M)\Delta x_2 +$ ~~(III)~~

$$+ \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2$$

② $u = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$ мы Δ-ли, что:

1) $u(x,y)$ разр в т. $O(0,0)$ ⟹ не диф в т. O

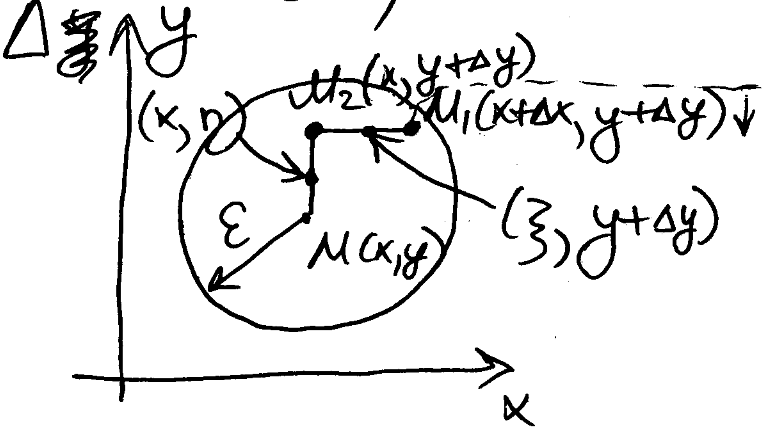
2) $u_x(0,0) = u_y(0,0) = 0$ т.о. ∃ЧП ⇏ диф-ть

Теор 15 (дост усл-е диф-ти) Если $u=f(x,y)$:

1) f_x, f_y $\exists$ в нек окр т. $M(x,y)$

2) f_x, f_y непр в т. M

$\Rightarrow$ u диф в т. M



Пусть f_x и f_y $\exists$ в $O_\varepsilon(M)$ и пусть $\Delta x, \Delta y$: $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y) \in O_\varepsilon(M)$

$$\Delta u|_M \equiv f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) =$$

$$= [\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}] + [\underbrace{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}] =$$

прим ф-лу Лагранжа к f и пер-й x на $[x, x+\Delta x]$ ($y+\Delta y = const$)

к пер-й y ($x = const$)

$\exists$-ют по усл 1)

$$= f'_x(\xi, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, \eta)\Delta y \qquad (1)$$

$\xi \in (x, x+\Delta x)$, $\eta \in (y, y+\Delta y)$

парам

Зам, что $\left.\begin{matrix} \xi = \xi(\Delta x, \Delta y) \to x \\ \eta = \eta(\Delta y) \to y \end{matrix}\right\}$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$

Т.к. по усл 2) f'_x, f'_y непр в т. $M(x,y)$, то

4.7

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(\underbrace{\xi(\Delta x,\Delta y)}_{\to x}, \underbrace{y+\Delta y}_{\to y}) = f'_x(x,y)$$

$$\Rightarrow f'_x(\xi, y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \alpha_1(\Delta x,\Delta y), \qquad (2)$$

где $\alpha_1 \to 0$, $\Delta x, \Delta y \to 0$

Ан-но $f'_y(x,\eta) = f'_y(x,y) + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)$, $\qquad (3)$

где $\alpha_2 \to 0$, $\Delta x, \Delta y \to 0$

(2), (3) $\to$ (1)

$$\Delta u|_M = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

Будем считать, что $\alpha_1(0,0) = \alpha_2(0,0) \equiv 0$

$\Rightarrow$ по опр 1 u диф в т. M $\cancel{\Delta}$

4) $u = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Δ-ть, что: 1) u диф в т. $O(0,0)$

2) $u_x, u_y \ \exists$ на E^2, но разр в т. O — в 5 лекцию

Рассм (сложную) ф-ю $z = f(\underbrace{\varphi(u,v)}_{x}, \underbrace{\psi(u,v)}_{y})$

Теор 16 (о диф-ти сл-й ф-ии) **Пусть:**