Лекция 5

Дифференцируемость сложной ф-ции

Рассм-м сложную ф-цию

$$z = f(\underbrace{\varphi(u,v)}_{=x}, \underbrace{\psi(u,v)}_{=y})$$

Теор 16 (о диф-ти сложной ф-ции) Пусть:

1) ф-ции $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ диф-мы в т. $N_0(u_0,v_0)$

2) ф-я $z=f(x,y)$ диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$, где $x_0=\varphi(u_0,v_0)$, $y_0=\psi(u_0,v_0)$

$\Rightarrow$ сложная ф-я $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ диф-ма в т. $N_0(u_0,v_0)$

Δ Рассм тт. $N_0(\overset{\text{фикс}}{u_0,v_0})$ и $N(\overset{\text{перем}}{u_0+\Delta u, v_0+\Delta v})$

$$\varphi,\psi \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$M_0(x_0,y_0) \qquad M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$$

Тем самым можно считать, что

$$\varphi,\psi : \Delta u, \Delta v \longmapsto \Delta x, \Delta y$$

Т.к. ф-ции $x=\varphi(N)$ и $y=\psi(N)$ диф в т-ке N_0, то (см. усл-ие I диф-ти ф-ции)

$$\Delta x\big|_{N_0} = \varphi_u(u_0,v_0)\Delta u + \varphi_v(u_0,v_0)\Delta v + \alpha_1\Delta u + \alpha_2\Delta v \qquad (1)$$

5.2

$$\Delta y\Big|_{N_0} = \psi_u(u_0, v_0)\Delta u + \psi_v(u_0, v_0)\Delta v + \beta_1 \Delta u + \beta_2 \Delta v \qquad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \to 0$ при $\Delta u, \Delta v \to 0$
$= 0$ при $\Delta u, \Delta v = 0$

Пусть $z_0 \equiv f(x_0, y_0)$, тогда

$$\begin{array}{ccc} M_0(x_0, y_0) & \text{и} & M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ z_0 & & z_0+\Delta z \end{array}$$

или, что то же самое, $f: \Delta x, \Delta y \to \Delta z$

Т.к. ф-я $z = f(M)$ диф-ма в т. M_0, то (вновь см. усл-ие I диф-ти ф-ии)

$$\Delta z\Big|_{M_0} = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y \qquad (3)$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$
$= 0$ при $\Delta x = \Delta y = 0$

и при этом могут $= 0$ (принципиальное отличие случая зависимых арг-ов от случая независимых)

В нашем случае γ_i являются непр-ми сложными ф-ми Δu и Δv. Напр

$$\underbrace{\gamma_1 = \gamma_1(\Delta x, \Delta y)}_{\text{непр при } \Delta x = \Delta y = 0} = \gamma_1(\overset{\text{непр}}{\Delta x(\Delta u, \Delta v)}, \overset{\text{непр при } \Delta u = \Delta v = 0}{\Delta y(\Delta u, \Delta v)}) \equiv \tilde{\gamma}_1(\Delta u, \Delta v)$$

$\Rightarrow \tilde{\gamma}_1(\Delta u, \Delta v)$ непр при $\Delta u = \Delta v = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \tilde{\gamma}_1(\Delta u, \Delta v) = \tilde{\gamma}_1(0,0) = \gamma_1(\Delta x(0,0), \Delta y(0,0)) =$

$= \gamma_1(0,0) = 0$, т.е. $\tilde{\gamma}_1$ – б.м. при $\Delta u, \Delta v \to 0$

Ан-но $\lim\limits_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \gamma_2 = 0$ ← Вставить зам-ие со стр **5.4**

Т.о. $\gamma_1(\Delta u, \Delta v), \gamma_2(\Delta u, \Delta v) \to 0$ при $\Delta u, \Delta v \to 0$
$= 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$

далее без тильд (~)

Т.к. $\Delta u, \Delta v = 0 \Rightarrow \Delta x, \Delta y = 0 \Rightarrow \gamma_1, \gamma_2 = 0$

Подставляя (1) и (2) в (3), имеем

$$\Delta z\big|_{N_0} = f_x \cdot (\varphi_u \Delta u + \varphi_v \Delta v + \alpha_1 \Delta u + \alpha_2 \Delta v)_1 +$$

$$+ f_y \cdot (\psi_u \Delta u + \psi_v \Delta v + \beta_1 \Delta u + \beta_2 \Delta v)_2 +$$

$$+ \gamma_1 \cdot (\quad)_1 + \gamma_2 \cdot (\quad)_2 =$$

$$= \overbrace{(f_x \varphi_u + f_y \psi_u)}^{\equiv A} \Delta u + \overbrace{(f_x \varphi_v + f_y \psi_v)}^{\equiv B} \Delta v +$$

$$+ \underbrace{(f_x \cancel{\alpha_1} + f_y \cancel{\beta_1} + \cancel{\gamma_1} \varphi_u + \cancel{\gamma_1} \alpha_1 + \cancel{\gamma_2} \psi_u + \cancel{\gamma_2} \beta_1)}_{\equiv \alpha(\Delta u, \Delta v)} \Delta u +$$

$\to 0$ при $\Delta u, \Delta v \to 0$

$$+ \underbrace{(\qquad)}_{\equiv \beta(\Delta u, \Delta v)} \Delta v =$$

$$= A \Delta u + B \Delta v + \alpha \cdot \Delta u + \beta \cdot \Delta v \qquad (4)$$

где $A, B = \text{const}$, $\alpha, \beta \to 0$ при $\Delta u, \Delta v \to 0$
$= 0$ при $\Delta u, \Delta v = 0$

Но равенство (4) представляет собой усл-ие I диф-ти ф-ии $z(u,v) \equiv f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ в т. $N_0(u_0,v_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow z(u,v)$ диф-ма в т. $N_0(u_0,v_0)$

Зам б.м.(б.м., б.м.) может $\neq$ б.м.
(соотв-й контрпример был рассмотрен для ф-ий одной перем-ой, в случае ф-ий двух переменных соотв-й контрпример полностью аналогичен)
Но непр б.м.(б.м., б.м.) = б.м.
непр б.м.(непр б.м., непр б.м.) = непр б.м.

Из рав-ва (4) и усл-ия (III) диф-ти ф-ии сразу же вытекают формулы для произв-ой сложной ф-ии $z(u,v)$

$$z_u(u_0,v_0) = A = \underset{\substack{\shortparallel \\ z_x}}{f_x(x_0,y_0)}\,\underset{\substack{\shortparallel \\ x_u}}{\varphi_u(u_0,v_0)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ z_y}}{f_y(x_0,y_0)}\,\underset{\substack{\shortparallel \\ z_u}}{\psi_u(u_0,v_0)}$$

$$z_v(u_0,v_0) = \text{— и —}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

$\uparrow$

Утв-ие теоремы и ф-лы диф-ия легко

обобщаются на случай сложных ф-ий произвольного числа аргументов

Зам В МАВЗе частные произв-ые предшествуют теореме о произв-ой сложной ф-ии, но ничего страшного, т.к. там рас-см-ся произв-ые только от элем-ых ф-ий и соотв-но по существу — лишь теория I-го семестра

Дифференциал функции

Рассм-м ещё раз приращение диф-ой ф-ии

$$\Delta u\big|_M = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m\right]_1 + \left[\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m\right]_2$$

$[\ ]_1$ и $[\ ]_2 \to 0$ при $\rho \equiv \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} \to 0$

$[\ ]_1$ — линейная часть $\Delta u\big|_M$

Если $u_{x_1}^2 + \dots + u_{x_m}^2 \neq 0 \Rightarrow [\ ]_1 \gg [\ ]_2$ при $\rho \to 0$

— в таком случае $[\ ]_1$ наз-ют ещё и главной частью $\Delta u\big|_M$

Пусть $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ диф-ая в т. M ф-я незав-х пер-х $x_1, \dots, x_m$

Опр $du\Big|_M \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\,dx_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(M)\,dx_i$ (*)

где $dx_i \equiv \Delta x_i \ \forall i = \overline{1,m}$

Лемма 5 (об inv-ти формы 1-го диф-ла)
Ф-ла (*) остаётся в силе и в случае, если $x_1, \dots, x_m$ явл-ся ф-ми незав-х перем-х $t_1, \dots, t_k$

Δ Док-ем для случая $m=k=2$:

$u = f(x_1, x_2)$, $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2}dt_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2 =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1}\underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2\right)}_{dx_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\underbrace{\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2\right)}_{dx_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2$$

В общем случае

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m} \quad (*)$$

где $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = \overline{1,m}$ ∇

Пример

$u = x^{y(x)}$ Найти производную

Один из способов был расм-ен в предыдущем семестре: $u = e^{y(x)\cdot \ln(x)}$ — и —

Чтобы найти $u'(x)$ вторым способом, эту ф-ию представляют в виде

$$x^{y(x)} = u(x, y(x)) \equiv u(x), \text{ где } y(x) \equiv x$$

Заметим, что x при таком подходе явл-ся арг-ом как ~~сх~~ самой ф-ии u, так и "внутр-й" ф-ии y. В связи с этим возникает необходимость в след-х обозначениях

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y(x)) \equiv \left[\frac{d}{dx} u(x,y)\right]_{y=y(x)}$$ — частная произв-ая по x

$$\frac{\partial u}{\partial y} u(x, y(x)) \equiv \left[\frac{d}{dy} u(x,y)\right]_{y=y(x)}$$ — и по y

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u(x) \equiv \frac{d}{dx} u(x, y(x)) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$ — полная производная по x ф-ии u (произв-ая сложной ф-ии $u(x) = u(x, y(x))$)

$\frac{\partial}{\partial x}$ — для обозначения частных произв-ых (т.е. произв-х ф-ий многих перем-х)

$\frac{d}{dx}$ – для обозн-ния производных ф-ии одного арг-та (в том числе произв-ой сложной ф-ии 1-го аргумента – полной произв-ой)

Зам Пусть $u = u(x(t_1, t_2), t_1, t_2)$

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}$ – частные пр-ые

А как обозначить полные произв-ые по t_1 и t_2?

След-им образом

$$\frac{Du}{Dt_1} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_1} \qquad \frac{Du}{\partial t_2} = \text{—}\ \text{''}\ \text{—}$$

Впрочем, иногда пишут и $\frac{du}{dt_1}$ вместо $\frac{Du}{Dt_1}$, но это не совсем строго

Вернёмся к нашему примеру пусть $y(x) \equiv x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = yx^{y-1} + x^y \ln x \cdot 1 =$$

$$= x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(\ln x + 1)$$

или (другой способ оформления)

$$du = u_x dx + u_y dy \overset{y(x)}{=} yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$$

инв-ть формы 1-го диф-ла

$y(x) \equiv x \Rightarrow dy = dx$

$du = x \cdot x^{x-1} dx + x^x \ln x \, dx = x^x (1+\ln x) dx$

$\frac{du}{dx} = (1+\ln x) x^x$

Утв (о диф-ах над арифм-ми операциями)

Пусть u и v диф-ые ф-ии $x_1, \dots, x_m$

$\Rightarrow$ **1**) $d(u \pm v) = du \pm dv$

2) $d(u \cdot v) = $ — " — 3) $d\frac{u}{v} = $ — " —

(причём u и v могут быть и независимыми переменными – формула всё-равно спр-ва)

Δ 3) $w = \frac{u}{v} \Rightarrow dw = w_u du + w_v dv =$

$= \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{v du - u dv}{v^2}$ $\cancel{\Delta}$3)

инв-ть формы 1-го диф-ла

Задание Док-ть остальные формулы и док-ть, что $\frac{\partial}{\partial x_1}(u \cdot v) = \frac{\partial u}{\partial x_1} v + u \frac{\partial v}{\partial x_1}$

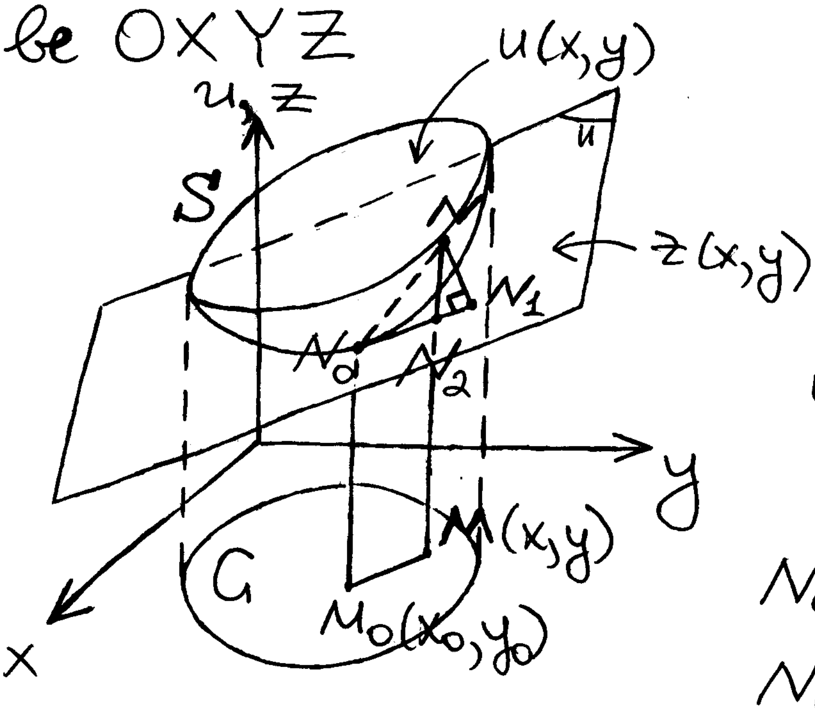
§6 Геометрический смысл диф-сти

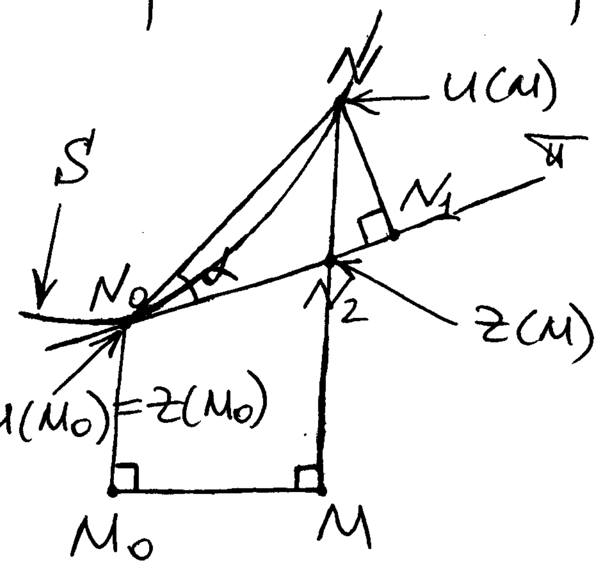
Пусть $u = f(x, y)$: $D_f \equiv G$

Опр Графиком ф-ии $u = f(x,y)$ наз-ся мн-во

$S \equiv \{ N(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in G \}$ – опр-ие обобщается на случай любого числа перем-х

Геом-ий смысл графика непр-ой ф-ии 2-х перем-ых — поверхность в пр-ве OXYZ





$N_0, N_1, N_2 \in \pi$

$N_0, N \in S$

$$z_0 \equiv z(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) \equiv u_0 \Rightarrow N_0(x_0,y_0,z_0)$$

Опр Плоскость π наз-ая касат-ой пл-тью к пов-ти S в т. N_0, если

1) $N_0 \in \pi \cap S$

2) $\lim\limits_{\substack{N \to N_0 \\ N \in S}} \underbrace{\frac{\rho(N,N_1)}{\rho(N,N_0)}}_{= \sin\alpha \to 0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \angle N N_0 N_1 \to 0$ при $N \to N_0$, $N \in S$

Теор 17 (геом-ий смысл диф-ти)

Если ф-ия $u = f(x,y)$ диф-ма в т. M_0, то в т. N_0 сущ-ет кас-ая пл-ть к графику ф-ии u