Теор 16 (о диф-ти сл-й ф-ии) пусть: **5.1**

$z = f(\underbrace{\varphi(u,v)}_{x}, \underbrace{\psi(u,v)}_{y})$

1) $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ диф в т. $N_0(u_0, v_0)$

2) $z = f(x,y)$ диф в т. $M_0(x_0, y_0)$, ~~где~~

где $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$

Расшифро (сл-во)

$\Rightarrow z = f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \equiv h(u,v)$ диф в т. N_0

Δ Рассм пр-ие ф-ии $z = h(u,v)$ в т. N_0 (т.е. в т. (u_0, v_0))

$$\Delta z = \Delta h \equiv h(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - h(u_0, v_0) =$$

$$= f(\underbrace{\varphi(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)}_{x_0+\Delta x}, \underbrace{\psi(-\text{''}-)}_{y_0+\Delta y}) - f(\underbrace{\varphi(u_0, v_0)}_{x_0}, \underbrace{\psi(-\text{''}-)}_{y_0}) \equiv$$

$$\equiv \Delta f \underset{2)}{=} f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \underbrace{\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y}_{\text{опр } 1}, \quad (1)$$

где $\gamma_i(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\Delta x, \Delta y \to 0$

$\gamma_i(0,0) = 0$ (при $\Delta x, \Delta y = 0$)

Рассм Δx и Δy

$$\Delta x \equiv \varphi(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - \varphi(u_0, v_0) =$$

$$\underset{1)}{=} \varphi_u(u_0,v_0)\Delta u + \varphi_v(u_0,v_0)\Delta v + \underbrace{\alpha \cdot \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}_{\text{опр } 2} \quad (2)$$

$$\Delta y \underset{1)}{=} \psi_u(\cancel{u_0,v_0})\Delta u + \psi_v(\cancel{u_0,v_0})\Delta v + \beta \cdot \sqrt{} \quad (3)$$

где $\alpha(\Delta u, \Delta v)$, $\beta(\Delta u, \Delta v) \to 0$, $\Delta u, \Delta v \to 0$

Зам, что:

5.2

1) $\gamma_i(\cancel{\Delta x(\Delta u,\Delta v)}, \cancel{\Delta y(\Delta u,\Delta v)}) \to 0$, $\Delta u, \Delta v \to 0$

$\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

$+ \gamma_i(0,0) = 0$ (могут $=0$)

"спасает"

2) $\left|\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right|, \left|\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\quad}}\right| \le 1 \overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} \dfrac{\Delta x}{\sqrt{\quad}}, \dfrac{\Delta y}{\sqrt{\quad}}$ — огр при $(\Delta u,\Delta v) \in \dot{O}_\varepsilon(0,0)$

$(2), (3) \to (1)$

$$\Delta z|_{N_0} = f_x \cdot (\varphi_u \Delta u + \varphi_v \Delta v + \alpha \cdot \sqrt{\quad}) + $$
$$+ f_y \cdot (\psi_u \Delta u + \psi_v \Delta v + \beta \cdot \sqrt{\quad}) + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y =$$
$$= \overbrace{(f_x \varphi_u + f_y \psi_u)}^{A} \Delta u + \overbrace{(f_x \varphi_v + f_y \psi_v)}^{B} \Delta v +$$
$$+ \underbrace{(\overset{\text{б.м.}}{f_x \alpha} + \overset{\text{б.м.}}{f_y \beta} + \overset{\text{б.м.}}{\gamma_1} \overset{\text{огр}}{\frac{\Delta x}{\sqrt{\quad}}} + \overset{\text{б.м.}}{\gamma_2} \overset{\text{огр}}{\frac{\Delta y}{\sqrt{\quad}}})}_{\equiv \gamma(\Delta u, \Delta v) \text{ — б.м. при } \Delta u, \Delta v \to 0} \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$$

$\overset{\text{опр 2}}{\Longrightarrow} z = h(u,v)$ дифф в т. $N_0(u_0, v_0)$ $\not\Delta$

Зам $A \equiv \underset{z_x}{f_x} \underset{x_u}{\varphi_u} + \underset{z_y}{f_y} \underset{y_u}{\psi_u} = \underset{z_u}{h_u}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \text{— " —} \end{cases}$$

⑤ $(x^x)' = ?$ $w = u(x)^{v(x)} = w(\underset{x}{u}(x), \underset{x}{v}(x))$

$\frac{dw}{dx} = w_u u' + w_v v' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v (\ln v) \cdot v' =$

$= x \cdot x^{x-1} \cdot 1 + x^x (\ln x) \cdot 1 = x^x (1 + \ln x)$

Дифф-ал ф-ции

Пусть u диф в т. $M(x_1, x_2)$. Рассм

$\Delta u|_M = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M)\Delta x_2\right]_1 + \left[\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2\right]_2$

Пусть x_1, x_2 — незав перем

$\Rightarrow \Delta x_1 \equiv dx_1,\ \Delta x_2 \equiv dx_2$

$[\ ]_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M) dx_2 \equiv du|_M$ (*)

Лемма 5 (об inv-ти формы 1-го диф-ла)

Ф-ла (*) остаётся в силе и в случае, когда x_1 и x_2 — диф-ые ф-ции t_1 и t_2

Δ $u = u(x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2))$

$du \equiv \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 =$

$= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right) dt_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\right) dt_2 =$

$= \frac{\partial u}{\partial x_1}\underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2\right)}_{dx_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\underbrace{\left(\text{— " —}\right)}_{dx_2} =$

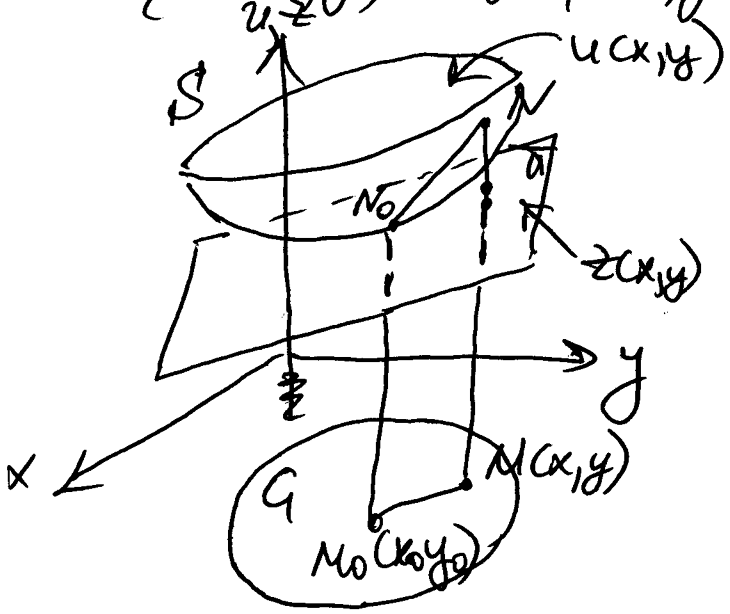
$= \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2$ $\blacktriangle$

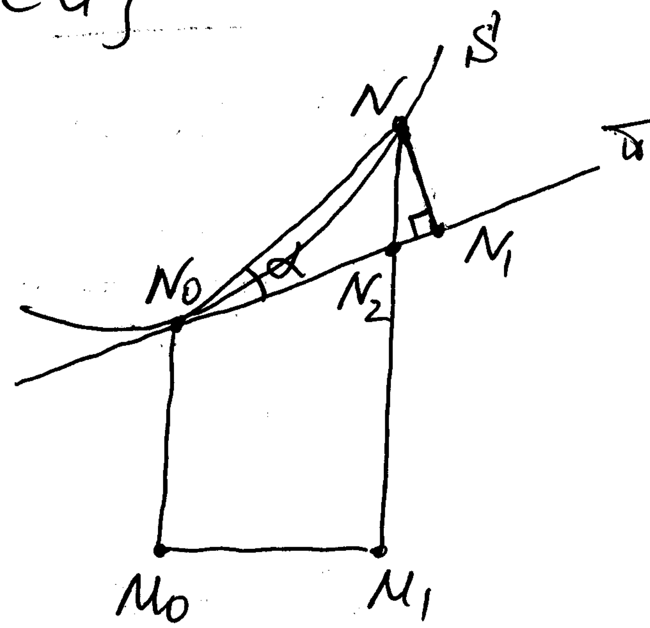
§6 Геом-ий смысл диф-ти

Пусть $u(x,y): D_u \equiv G$

Опр Графиком ф-ии $u(x,y)$ наз мн-во

$$S \equiv \{N(x,y,u(x,y)) \mid (x,y) \in G\}$$





$N_0(x_0,y_0,\underset{\overset{\parallel}{z(x_0,y_0)}}{u(x_0,y_0)})$, $N(x,y,u(x,y))$, $N_2(x,y,z(x,y))$

Опр Пл-ть π наз касат. пл-ю к пов. S в т. N_0, если:

1) $N_0 \in \pi \cap S$

2) $\lim\limits_{\substack{N \to N_0 \\ N \in S}} \boxed{\dfrac{\rho(N,N_1)}{\rho(N,N_0)}} = 0$, где т. N_1: $NN_1 \perp \pi$, $N_1 \in \pi$

$= \sin\alpha \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0$

Теор 17 (геом смысл диф-ти)

Если $u(x,y)$ диф в т. $M_0(x_0,y_0)$, ~~то в т.~~ то в т. $N_0(x_0,y_0,u_0)$, где $u_0 = u(x_0,y_0)$ сущ касат. пл-ть к гр-ку ф-ии u

5.5

Δ Т.к. u диф в т. M_0, то

$$\Delta u\big|_{M_0} \equiv u(M)-u(M_0)=u-u_0=$$

$$=\underbrace{u_x(M_0)}_{A}\Delta x+\underbrace{u_y(M_0)}_{B}\Delta y+\bar{\bar{o}}(\rho) \qquad (1)$$

$\Delta x = x-x_0$, $\Delta y = y-y_0$, $\rho \equiv \rho(M_0, M) = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

Δ-м, что ур-ие

$$z-z_0 = A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0),\ z_0 \equiv u_0 \qquad (2)$$

— ур-ие касат. пл-ти π в т. $N_0(x_0, y_0, u_0)$

Проверяем:

1) $\underset{\substack{\Uparrow\\ S - \text{по опр графика}}}{N_0(x_0, y_0, u_0)} = \underset{\substack{\Uparrow\\ \pi - \text{в силу (2)}}}{N_0(x_0, y_0, z_0)} \Rightarrow N_0 \in S \cap \pi$

2) Надо показать, что

$$\frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} \to 0,\ N \to N_0 \text{ и } N \in S$$

Из ΔNN_1N_2 видно, что

$$\rho(N, N_1) \leq \rho(N, N_2) = u(M)-z(M) \overset{(1)\text{ и }(2)}{=\!=}$$

$$= \cancel{u_0}+A\Delta x+B\Delta y+\bar{\bar{o}}(\rho)-\cancel{z_0}-A\Delta x-B\Delta y = \bar{\bar{o}}(\rho)$$

$$\rho(N, N_0) \geq \rho(M, M_0) \equiv \rho$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow\\0}}{0} \leq \underset{\substack{\downarrow\\0 \text{ чтд}}}{\frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)}} \leq \frac{\rho(N, N_2)}{\rho(M, M_0)} = \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{\bar{\bar{o}}(\rho)}{\rho}} \quad \rho \to 0 \Leftrightarrow \underset{(N \in S)}{N \to N_0}$$

∇

5.6

Зам. Из д-ва $\Rightarrow$ ур-ие кас пл π:

$$u_x(M_0)(x-x_0)+u_y(M_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

$\Rightarrow \vec{n}=\{u_x(M_0), u_y(M_0), -1\}$ — вектор нормали к пл π $\equiv$ вектор нор~~мали~~ к пов. S в т. N_0

(1) $u=x^2+y^2$, $M_0(1,2) \xrightarrow{u} N_0(\underset{x_0}{1},\underset{y_0}{2},\underset{z_0}{5})$

дифф в т. M_0 $\Rightarrow \exists$ кас пл π

$u_x(M_0)=2x_0=2 \qquad u_y(M_0)=2y_0=4$

$\Rightarrow \pi$: $z-5=2(x-1)+4(y-2)$, $\vec{n}=\{2,4,-1\}$

---

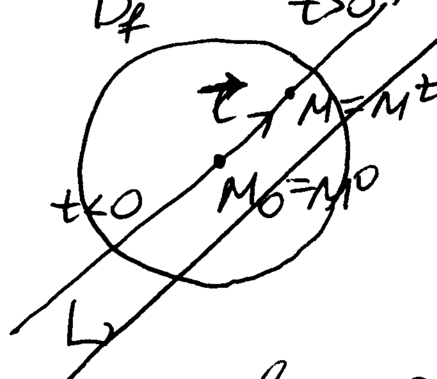
§7 Произв-я по напр-ию и градиент

Пусть $u=f(M)=f(x,y)$: $D_f \supset$ окр т. $M_0(x_0,y_0)$

Зададим напр-ие с помощью

$\vec{l}=\{l_1,l_2\}: |\vec{l}|=\sqrt{l_1^2+l_2^2}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{l_1=\cos\gamma_1,\ l_2=\cos\gamma_2}_{\text{напр-~~ие~~ cos-ы}}$, $\gamma_i\in[0,\pi]$



т. M_0, $\vec{l}$ опр-ют прямую L

$$M_0M \equiv \begin{cases} +|\overrightarrow{M_0M}|, & \overrightarrow{M_0M}\uparrow\uparrow\vec{l} \\ -|\overrightarrow{M_0M}|, & \overrightarrow{M_0M}\uparrow\downarrow\vec{l} \end{cases}$$

величина напр-го отр $[M_0,M]\subset L$