6.1

Δ Мы знаем, что $u(x,y)$ диф в т. M_0

$\Rightarrow u(M)-u(M_0) \equiv u - u_0 = \cancel{u_x(M_0)}$

$$= \underbrace{u_x(M_0)}_{A}\Delta x + \underbrace{u_y(M_0)}_{B}\Delta y + \bar{\bar{o}}(\rho), \qquad (1)$$

$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Док-ем, что ур-ие

$$z - z_0 = A(x-x_0) + B(y-y_0) \quad (2)$$

– общее ур-ие искомой касат-ой пл-ти

Проверяем:

1) $\underbrace{N_0(x_0, y_0, z_0)}_{\in \pi} = \underbrace{N_0(x_0, y_0, u_0)}_{\in S} \Rightarrow N_0 \in \pi \cap S$

2) Надо пок-ть, что $\cancel{\rho(N,}$

$$\frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = \sin\alpha \to 0 \text{ при } N \to N_0, N \in S$$

Из рисунка видно, что

(см. $\Delta N N_1 N_2$ – катет $\le$ гипотенузы)

$$\rho(N, N_1) \le \rho(N, N_2) = u(M) - z(M) = \text{ см. (1) и (2)}$$

$$= u_0 + A\Delta x + B\Delta y + \bar{\bar{o}}(\rho) - z_0 - A\Delta x - B\Delta y = \bar{\bar{o}}(\rho)$$

$$\rho(N, N_0) \ge \rho(M, M_0) \equiv \rho$$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow\atop 0}{0} \le \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)}} \le \frac{\rho(N, N_2)}{\rho(M, M_0)} = \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{\bar{\bar{o}}(\rho)}{\rho}} \quad \rho \to 0$$

$\leftarrow$ по теор о 2-х полиц-их

Но $\rho \to 0 \Leftrightarrow M \to M_0 \Leftrightarrow N \to N_0$, $N \in S$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{N \to N_0 \\ N \in S}} \frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0 \text{ чтд}$$

$\measuredangle$

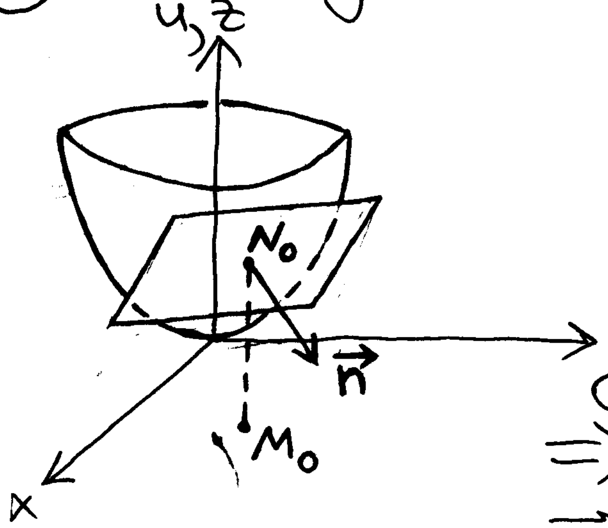
Из док-ва видно, что ур-ие касат-ой пл-ти в т. N_0 имеет вид

$$u_x(M_0)(x - x_0) + u_y(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$\Rightarrow \vec{n} = \{u_x(M_0), u_y(M_0), -1\}$ – вектор нормали к пл-ти π (наз-ся также вектором нормали к пов-ти S в т. N_0)

Примеры

① $u = x^2 + y^2$ – эллипт-ий параболоид



$M_0(1,2) \xmapsto{u} N_0(1,2,5)$, $x_0\ y_0\ z_0$

$u_x(M_0) = 2x_0 = 2$

$u_y(M_0) = 2y_0 = 4$

$\Rightarrow z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)$

$\vec{n} = \{2, 4, -1\}$

② $u = \sqrt{x^2+y^2}$ $u_x(0,0) = u_y(0,0) = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y)$ не диф в т. O $\Rightarrow$ невертикальной кас-ой пл-ти $\nexists$

Утв (без док-ва)
Если в т. N_0 сущ-ет касат-я пл-ть Π ~~$\Pi \not\parallel$ оси u~~ к гр-ку ф-ии $u = f(x,y)$:
$\Pi \not\parallel$ оси u $\Rightarrow$ ф-я диф-ма в т. M_0

Зам В нашем случае (з-ча 2) и верт-ой касат-ой пл-ти $\nexists$, т.к. тогда хотя бы одна у пр-ых u_x или $u_y = \infty$, а не $\not\exists$ в т. O

§7 Произв-ая по направлению и градиент

Пусть $u = f(x,y,z) = f(M)$: $D_f \supset$ окр-ть т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$

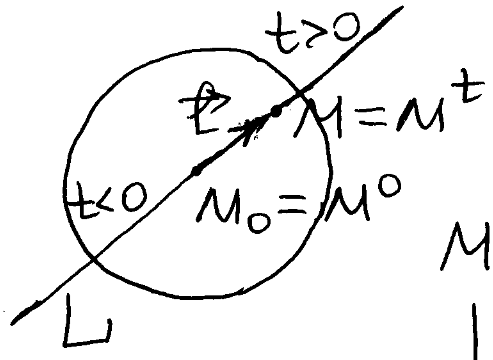
Мы уже знаем, что u_x, u_y — скорости изм-ия ф-ии u вдоль осей x и y соотв-но. Введём теперь производную по произвольному направлению (т.е. по направлению, которое может быть отличным от напр-ий коорд-ых осей). Эта пр-ая будет характеризовать скорость изменения ф-ии в данном произв-ом направлении

Направление будем задавать единичным вектором ℓ (это упрощает формулы):

$\vec{l} = \{l_1, l_2, l_3\} : |\vec{l}| = \sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2} = 1 \Rightarrow$ $\boxed{6.4}$

$\Rightarrow l_1 = \cos\alpha,\ l_2 = \cos\beta,\ l_3 = \cos\gamma,$

$\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ — напр-ие cos-ы



т. M_0, $\vec{l} \overset{\text{опр-ют}}{\Longrightarrow}$ прямую L

$$M_0M \equiv \begin{cases} +|\overrightarrow{M_0M}|, & \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{l} \\ -|\overrightarrow{M_0M}|, & \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \vec{l} \end{cases}$$

величина направленного отр-ка $[M_0, M]$

Опр Если сущ-ет $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in L}} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}$, то он наз-ся произв-ой ф-ии $u = f(M)$ в т. M_0 по напр-ию $\vec{l}$

Обозн $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$, $u_{\vec{l}}(M_0)$

Получим формулу, выражающую произв-ую по напр-ию через частные произв-ые ф-ии u (поскольку мы умеем считать частные производные, то с помощью этой ф-лы мы сможем подсчитать произв-ую и по произв-му напр-ию $\vec{l}$)

Утв Если $u(M)$ диф в т. M_0, то $\forall \vec{\ell}$ | 6.5

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma \quad (\mathrm{I})$$

$\vec{\ell}$ сущ-ет и равна

Δ Прямая $L \subset E^3$ — частный случай прямой в пр-ве E^m. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow$

$$L = \{M(x,y,z) \mid x = \underbrace{x_0 + t\cos\alpha}_{\equiv x(t)},\ y = \underbrace{y_0 + t\cos\beta}_{\equiv y(t)},$$
$$z = \underbrace{z_0 + t\cos\gamma}_{\equiv z(t)},\ t \in (-\infty, +\infty)\}$$

$M(x(t), y(t), z(t)) \equiv M^t : M \in L \Leftrightarrow M = M^t$

На прямой L

$u = f(M^t) = f(x(t), y(t), z(t)) =$

$= f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) \equiv \tilde{f}(t)$

— сложная ф-ия арг-та t

Заметим, что

$f(M_0) = f(x_0, y_0, z_0) = \tilde{f}(0)$, т.е. $M_0 \leftrightarrow t = 0$
$\Rightarrow M_0 = M^0$,

~~причём $M^t \to M_0 = M^0 \Leftrightarrow t \to 0$~~ и что

$|M^0 M^t| = \sqrt{[x(t) - x_0]^2 + \dots} = \sqrt{t^2\cos^2\alpha + \dots} =$

$= |t|\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = |t|$,

а значит $M^t \to M_0 = M^0 \Leftrightarrow |M^0 M^t| \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$

Кроме того, т.к. $\operatorname{sign} M^0M^t = \operatorname{sign} t$, то $M^0M^t = t$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \lim_{M^t \to M^0} \frac{f(M^t) - f(M^0)}{M^0 M^t} = \lim_{t \to 0} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(0)}{t - 0} \equiv$$

$\equiv \frac{d\bar{f}}{dt}(0)$ (если сущ-ет)

$x(t), y(t), z(t)$ диф-мы при $\forall t$ (в т.ч. при $t=0$)

$f(x,y,z)$ диф в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{tikzcd} t=0 \arrow[r, "x{,}y{,}z"] \arrow[rr, bend right, "\bar{f}"'] & M_0 \arrow[r, "f"] & \cancel{f}\,u \end{tikzcd}$$

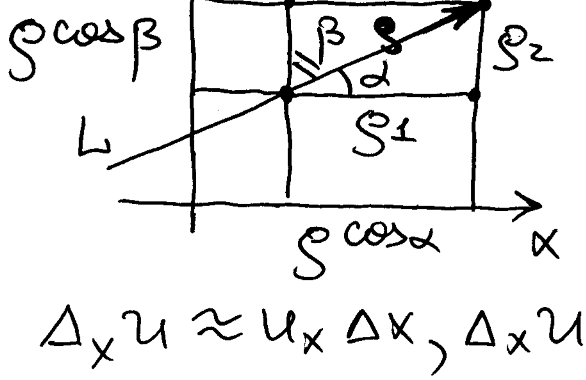
$\Rightarrow$ ф-ия $\bar{f}$ диф при $t=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d\bar{f}}{dt}(0)$ действ-но сущ-ет

и $\frac{d\bar{f}}{dt}(0) = f_x(M_0) x_t(0) + \cdots =$

$= f_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f_y(M_0)\cdot\cos\beta + f_z(M_0)\cdot\cos\gamma$

Дополн-но:



Пусть $u = f(x,y)$

$\rho_1 = \rho\cos\alpha, \; \rho_2 = \rho\cos\beta$

$\Delta u \approx \Delta_x u + \Delta_y u$ (в силу диф-фер-ти u)

$\Delta_x u \approx u_x \Delta x, \; \Delta_x u \approx u_y \Delta y$ вклады осей x и y

$\Rightarrow \Delta u|_L \approx u_x \rho_1 + u_y \rho_2 = \rho(u_x \cos\alpha + u_y \cos\beta)$

$\frac{\partial u}{\partial l} \approx \frac{\Delta u|_L}{\rho} = u_x \cos\alpha + u_y \cos\beta$ — в пределе точное рав-во

Опр Градиентом ф-ии $u(M)$ в т. M_0 наз вектор **6.7**

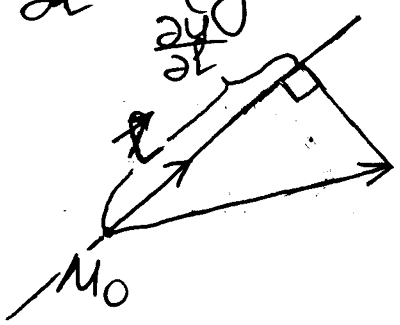
$$\{u_x(M_0), u_y(M_0), u_z(M_0)\} \equiv \operatorname{grad} u\big|_{M_0}$$

С использованием градиента формуле (I) можно придать вид

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left(\operatorname{grad} u\big|_{M_0}, \vec{l}\right) \qquad \text{(II)}$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}) = Пр_{\vec{l}} \operatorname{grad} u =$$



$$= |\operatorname{grad} u|\cdot|\vec{l}|\cdot\cos\varphi =$$

$$= |\operatorname{grad} u|\cdot\underbrace{\cos\varphi}_{|\;|\le 1}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| \le |\operatorname{grad} u|$$

причём $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{max} = +|\operatorname{grad} u|$ при $\varphi = 0$

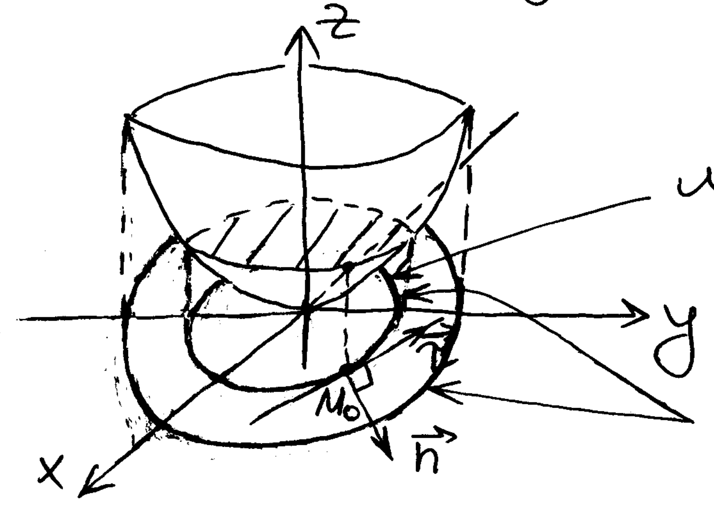
$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{min} = -|\operatorname{grad} u|$ при $\varphi = \pi$

Т.о., вектор $\operatorname{grad} u$ показывает напр наиб-го роста ф-ии u, а $|\operatorname{grad} u|$ — скорость изм-я ф-ии в этом напр-ии, т.е. скорость наиб-го роста (геом. смысл градиента)

Пример

① $u = x^2 + y^2$, $M_0(1,2)$

$u_x(M_0) = 2$, $u_y(M_0) = 4 \Rightarrow \mathrm{grad}\, u|_{M_0} = \{2, 4\}$



Опр Линией уровня ф-ии $u = f(x,y)$ наз-ся кривая на пл-ти XY, на которой ф-ия $u(M)$ принимает постоянное зн-ие

Найдём линию уровня, проходящую через т. M_0

$u(M_0) = 5 \Rightarrow$ уравнение искомой линии уровня имеет вид

$x^2 + y^2 = 5$ – окружность радиуса $\sqrt{5}$

$\left.\begin{array}{l} x x_0 + y y_0 = 5 \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \end{array}\right\}$ ур-ие касательной

$\vec{n} = \{1, 2\}$ – вектор нормали

Т.о. $\vec{n} \parallel \mathrm{grad}\, u|_{M_0}$!! – это не случайный результат

Оказ-ся $\operatorname{grad} u|_{M_0}$ всегда $\parallel \vec{n} \perp \vec{\tau}$,

где $\vec{n}$ — нормаль к линии уровня в т. M_0

$\vec{\tau}$ — касат-ый вектор — и —

Найдём $\frac{\partial u}{\partial n}(M_0)$

$$n_1 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}(M_0) \equiv \frac{\partial u}{\partial n_1}(M_0) = \underbrace{u_x(M_0)}_{=2}\frac{1}{\sqrt{5}} + \underbrace{u_y(M_0)}_{=4}\frac{2}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$$

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \frac{\partial u}{\partial n}(M_0)$$

— как и следовало ожидать!

Задание. Убедитесь, что $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$

Понятия градиента, произв-ой по напр-нию и линии уровня **легко** обобщаются на случай ф-ий произв-го числа переменных (только в **случае**, когда перем > 2, вместо линий уровня получаются поверхности уровня).

§8 Частные произв-ые и диф-лы высших порядков

Пусть $u = f(x_1, \dots, x_m)$: $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ сущ-ет в **нек-й** окр т. $M_0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(M)$ $\boxed{6.10}$

Опр $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(M)\right)\Big|_{M=M_0}$

– 2-ая частная произв-ая или частная произв-ая 2-го порядка

Другое обозначение

$u_{x_i x_k} \equiv (u_{x_i})_{x_k}$

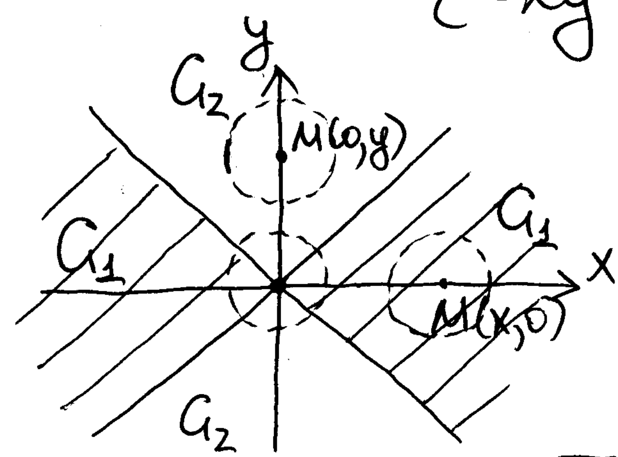
$i \neq k$ – смешанная частная произв-ая

$i = k \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ или $u_{x_i^2}$

Ан-но опр-ся произв-ые старших порядков

Пример

1) $u(x,y) = \begin{cases} +xy, & |y| \le |x| \leftarrow \text{мн-во } G_1 \\ -xy, & |y| > |x| \leftarrow \text{мн-во } G_2 \end{cases}$



$u_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \equiv$

$\equiv \frac{d}{dy}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)\right]_{y=0}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) \equiv \frac{d}{dx}\left[u(x,\overset{\text{const}}{y})\right]_{x=0}$

Пусть $y \neq 0 \Rightarrow M(0,y) \in G_2$, причём $\exists \varepsilon > 0$:

$O_\varepsilon(M) \subset G_2 \Rightarrow u(x,y) = -xy$ в $O_\varepsilon(M) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-xy)\Big|_{x=0} = -y$

Пусть $y=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) \equiv \frac{d}{dx}[\underbrace{u(x,0)}_{\in G_1}]_{x=0} =$

$= \frac{d}{dx}(+x\cdot 0)\Big|_{x=0} = 0 = -y$ (т.к. $y=0$)

Т.о. $\forall y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = -y$

Тогда $u_{xy}(0,0) = \frac{d}{dy}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)\right] = \frac{d}{dy}(-y) = -1$

Ан-но $u_{yx}(0,0) = +1$ (проверьте самост-но)

Итак, $u_{xy}(0,0) \neq u_{yx}(0,0)$

Возникает естеств-ый вопрос, а при каких усл-ях эти произв-ые равны?

Опр Ф-ия $u = f(x_1, \dots, x_m)$ наз-ся дважды диф-ой в т. M_0, если все её частные произв-ые 1-го порядка диф-мы в т. M_0

Зам Тот факт, что частные пр-ые диф-мы в т. M_0, предполагает, что все они $\exists$-ют в нек-й окр ~~т. М~~ этой т-ки

Иногда в опр-ии ~~дву~~кратной диф-ти требуют, чтобы частные пр-е были диф-мы в нек-ой окр-ти т. M_0 (а не просто $\exists$-ли), но это тре излишне (см. зам-ие после док-ва теор. 18)