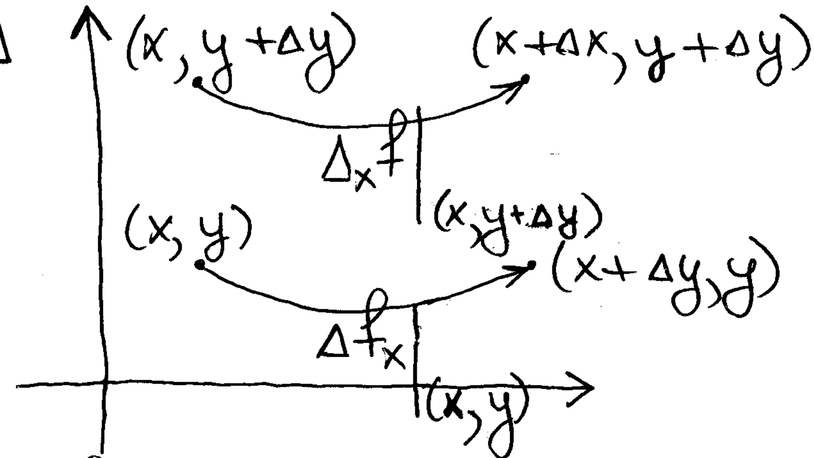
Теор 18 Если ф-ия $u=f(x,y)$ дважды дифф-ма в т. $M_0(x,y)$, то $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$

Δ



Далее считаем, что x, y – фикс-ые
$\Delta x, \Delta y$ – перем-ые

Введём в рассм-ие

$$\Delta_y (\Delta_x f)\Big|_{(x,y)} \equiv \Delta_x f\Big|_{(x,y+\Delta y)} - \Delta_x f\Big|_{(x,y)} =$$

$$=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]-[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]=$$

$$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)]-[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]=$$

$$=\Delta_y f\Big|_{(x+\Delta x,y)}-\Delta_y f\Big|_{(x,y)} \equiv \Delta_x(\Delta_y f)\Big|_{(x,y)}$$

Зафиксируем ещё и Δx, ~~(Δy переменная)~~
оставив свободной только перем-ую Δy. Тогда

$$\Delta_y \Delta_x f(\Delta x,\Delta y)\Big|_{(x,y)} = \underbrace{\Delta_x f(\Delta x)\Big|_{(x,y+\Delta y)}}_{F(y+\Delta y)} - \underbrace{\Delta_x f(\Delta x)\Big|_{(x,y)}}_{F(y)} =$$

Теор Лагранжа $\quad \in(0,1)$

$$= F'_y(y+\theta\Delta y)\Delta y = \left[\frac{\partial}{\partial y}\Delta_x f(\Delta x)\Big|_{(x,y+\theta\Delta y)}\right]\Delta y =$$

$$=\Delta y \frac{\partial}{\partial y}[f(x+\Delta x, y+\theta\Delta y)-f(x,y+\theta\Delta y)]=$$

$$= \Delta y \left[f_y(x+\Delta x, y+\underbrace{\theta \Delta y}_{\Delta_1 y}) - f_y(x, y+\underbrace{\theta \Delta y}_{\Delta_1 y}) \right] =$$

= (используем диф-ть f_y в т. $M(x,y)$) =

$$= \Delta y \left[\cancel{f_y(x,y)} + f_{yx}(x,y)\Delta x + \cancel{f_{yy}(x,y)\theta \Delta y} + \right.$$

$$\left. + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y - \cancel{f_y(x,y)} - \cancel{f_{yy}(x,y)\theta\Delta y} - \beta_2 \Delta y \right] =$$

$$= f_{yx}(x,y)\Delta x \Delta y + \alpha_1 \Delta x \Delta y + \beta_1 \Delta y^2 - \beta_2 \Delta y^2$$

Пусть $\Delta x = \Delta y \equiv h$

$$\Rightarrow \Delta_y \Delta_x f \big|_{(x,y)} = f_{yx}(x,y) h^2 + \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1 - \beta_2)}_{\equiv \alpha(h) \to 0,\ h \to 0} h^2 =$$

$$= \left[f_{yx}(x,y) + \alpha \right] h^2$$

Ан-но $\Delta_x \Delta_y f \big|_{(x,y)} = \left[f_{xy}(x,y) + \beta \right] h^2$

$\beta \to 0,\ h \to 0$

Т.к. $\Delta_y \Delta_x \square = \Delta_y \Delta_x \square$, то

$$f_{yx}(x,y) + \underset{\to 0}{\alpha} = f_{xy}(x,y) + \underset{\to 0}{\beta} \quad h \to 0$$

$$\Rightarrow f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

< Вставка: зам-ие со стр 7.6

Диф-лы высших порядков

Пусть $u = f(x,y)$ дважды диф-ма в т. $M_0(x_0, y_0)$, x, y – незав-ые перем-ые

Рассм-м 7.3

$$du(dx,dy)\Big|_{M(x,y)} \equiv u_x(x,y)dx + u_y(x,y)dy,$$

где $M(x,y) \in$ нек-ой окр-ти т. $M_0(x_0,y_0)$

$du\big|_{M_0}$ — линейная часть $\Delta u\big|_{M_0}$

$d\,du\big|_{M_0}$ — лин-ая часть $\Delta\, du\big|_{M_0}$

↑
повторный диф-ал

$$\Delta\, du\Big|_{M_0} \equiv du(dx,dy)\Big|_{M} - du(dx,dy)\Big|_{M_0} =$$

$$= \underbrace{[u_x(x,y) - u_x(x_0,y_0)]_1}_{\Delta(u_x)|_{M_0}} dx + \underbrace{[u_y(x,y) - u_y(x_0,y_0)]_2}_{\Delta(u_y)|_{M_0}} dy$$

$M(x,y) = M(x_0+d_1x,\, y_0+d_1y)$,

где d_1x, d_1y не связаны с dx, dy

Т.к. u_x и u_y диф-мы в т. $M_0(x_0,y_0)$, то

$$\Delta(u_x)\Big|_{M_0} = u_{xx}(x_0,y_0)d_1x + u_{xy}(x_0,y_0)d_1y + \bar{\bar{o}}(\rho_1)$$

$$\Delta(u_y)\Big|_{M_0} = \text{— и —}, \quad \rho_1 = \sqrt{d_1x^2 + d_1y^2}$$

$\Rightarrow$ линейная часть $\Delta\, du\big|_{M_0}$ равна (отбрасываем $\bar{\bar{o}}$-ые)

$$d\,du\,|(dx,dy,d_1x,d_1y)\Big|_{M_0} =$$

$$= u_{xx}d_1x\,dx + u_{xy}d_1y\,dx + u_{yx}d_1x\,dy + u_{yy}d_1y\,dy$$

Заметим, что $u_{xy}(M_0) = u_{yx}(M_0)$ — см. теор 18

Опр $d^2u(dx,dy)\big|_{M_0} \equiv ddu(dx,dy,dx,dy)\big|_{M_0}$ — второй диффер-ал ф-ии u в т. M_0

Из этого опр-ия следует, что

$d^2u\big|_{M_0} = u_{xx}(M_0)dx^2 + 2u_{xy}(M_0)dx\,dy + u_{yy}(M_0)dy^2$

Введём в рассм-ие оператор диф-ла d:

$d[u(x,y)] \longmapsto du(dx,dy)\big|_{M_0}$

Несложно убедиться, что d представим в таком виде

$d = \underbrace{dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}}_{\text{операторы ч. частных произв-ых}}$ $\quad d\big|_{M_0}$ иногда уточняют

Теперь введём в рассм-ие оператор второго диф-ла

$d^2 :\ d^2[u(x,y)] \longmapsto d^2u(dx,dy)\big|_{M_0}$

Несложно убедиться в том, что

$d^2\square = dx^2\frac{\partial^2\square}{\partial x^2} + 2dx\,dy\frac{\partial^2\square}{\partial x\partial y} + dy^2\frac{\partial^2\square}{\partial y^2} =$

$= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\square$

Понятия дифференц-ти и диф-ла второго порядка для ф-ий произв-го числа арг-ов вводятся ан-но. С помощью метода матем-ой индукции опр-ют диф-ть и диф-лы n-го (т.е. произв-го) порядка. При этом для диф-ла n-го спр-ва ф-ла

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n u$$

Зам 1 Диф-лы старших ($n \geq 2$) порядков не обладают св-ом инв-ти формы. Пусть, напр, $u = u(x(t_1, t_2), y(t_1, t_2))$

$$\Rightarrow d^2 u = d\,[u_x dx + u_y dy] =$$

$$= [du_x]\,dx + u_x d^2x + [u_y]\,dy + u_y d^2 y =$$

$$= (u_{xx} dx^2 + 2 u_{xy} dx\,dy + u_{yy} dy^2) + u_x d^2 x + u_y d^2 y \qquad (*)$$

(если подробно расписать dx, dy, d^2x и d^2y, то получится след-й результат:

$$d^2 u = u_{t_1 t_1} dt_1^2 + 2 u_{t_1 t_2} dt_1 dt_2 + u_{t_2 t_2} dt_2^2,$$

который в соотв-ии с опр-ем 2 и обосновывает ф-лу (*), а вместе с ней и приведённое выше правило раскрытия диф-ла; если постулировать, что $d^2 x = d^2 y = 0$ для независимых x и y, то получится, что (*) представляет собой inv-ую форму 2-го диф-ла)

Зам 2 Если $x=\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2$

$y=\beta_1 t_1+\beta_2 t_2$ то

$$\Rightarrow d^2x = x_{t_1t_1}dt_1^2+2x_{t_1t_2}dt_1dt_2+x_{t_2t_2}dt_2^2=0=d^2y$$

Т.о., относительно линейной замены (и только относит-но лин-ой замены) перем-ых 2-ой (и как несложно убедиться — все последующие) диф-лы обладают св-ом inv-ти формы (разум-ся, речь здесь идёт об "укороченных" формах старших диф-ов)

Вставка к стр 7.2

Зам Чтобы упростить док-во возможности перестановки произв-х начиная с 3-го порядка, (воспольз-сь мат.инд-ей) можно потребовать (n-1)-кратной диф-ти ф-ии в окр-ти рассм-ой т-ки (иногда ~~текущую~~ это требование закладывают в опр-ие n-кр-й диф-ти), но можно и не требовать. Для этого придётся обобщить ф-ю, использованную при док-ве ~~Т~~ т-мы для случая произв-ых 2-го порядка, т.е. рассм-ть прир-ие $\Delta_z\Delta_y\Delta_x f$ и т.д.