Диф-лы высших порядков

Пусть $u(x,y)$ ~~дваж~~2-ды диф в т. M_0

x, y – нез~~ые~~ав пер-ые

Нап, что $d^2u|_{M_0} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)dy =$

$$= \underbrace{\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{\equiv d} u|_{M_0}$$

$$\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \equiv dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2dx\,dy\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Опр $d^2u|_{M_0} \equiv \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u|_{M_0} =$

$$= u_{xx}(M_0)dx^2 + 2u_{xy}(M_0)dx\,dy + u_{yy}(M_0)dy^2$$

(Старшие диф-лы опр-ся ан-но)

Пусть $u = u(x(t_1,t_2), y(t_1,t_2))$

$$\Rightarrow d^2u = d[du] = d[u_x dx + u_y dy] =$$

$$= \underset{\underset{u_{xx}dx + u_{xy}dy}{\parallel}}{[du_x]}dx + u_x d^2x + \underset{\underset{—\,и\,—}{\parallel}}{[du_y]}dy + u_y d^2y =$$

(1)

$$= (u_{xx}dx^2 + 2u_{xy}dx\,dy + u_{yy}dy^2) + \underbrace{u_x d^2x + u_y d^2y}_{\text{портит инв-ть формы}}$$

С другой стороны

$$d^2u \equiv u_{t_1t_1}dt_1^2 + 2u_{t_1t_2}dt_1dt_2 + u_{t_2t_2}dt_2^2 \quad (2)$$

Зад-ие Д-ть, что (1)=(2)

Зам Если $x = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2$

$y = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2$ то

$$d^2x = \underbrace{\cancel{x_{t_1t_1}}}_{0}dt_1^2 + \dots = 0 = \underset{\text{ан-но}}{d^2y}$$

$\Rightarrow d^2u$ – inv-ен отн-но лин-й замены пер-х

§9 Формула Тейлора

$$f(x_1) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)\Delta x_1}^{df} + \dots + \frac{1}{n!}\overbrace{f^{(n)}(x_0)\Delta x_1^n}^{d^nf} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{f^{(n+1)}(\xi)\Delta x_1^{n+1}}_{d^{n+1}f} = \quad (\Delta)$$

$$= f(x_0) + df|_{x_0} + \dots + \frac{1}{n!}d^nf|_{x_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f|_{\xi} \quad (*)$$

где $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\xi \in (x_0, x_1)$, $x_1 \in O_\delta(x_0)$

(Оказ-ся, (*) ~~явл-ся~~ унив-~~ен~~на, т.е. работает и в случае ф-ий многих пер-х)

Зам Если x_1 – завис-я пер-я, то $(\Delta) \neq (*)$

~~всё = спр-ва, а (*) – нет~~ справа нет

7.3

Введём обозн-ие:

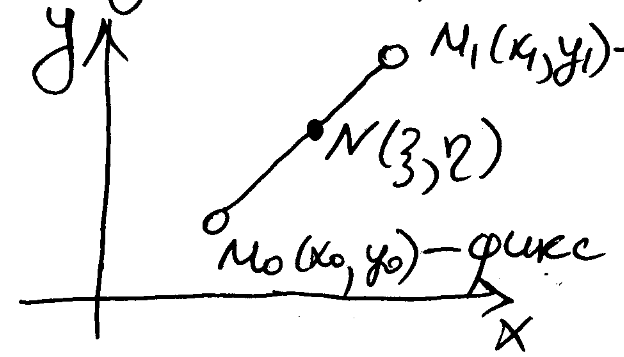
$$\Delta^k f|_{x_0} = \Delta^k f(\Delta x_1)|_{x_0} \equiv f^{(k)}(x_0)\Delta x_1^k = d^k f(\Delta x_1)|_{x_0}$$

Тогда ~~формула~~ ф-ла *

$$f(x_1)-f(x_0) \equiv \Delta f|_{x_0} = \Delta^1 f|_{x_0} + \dots + \frac{1}{n!}\Delta^n f|_{x_0} + \frac{1}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f|_{\xi}$$

будет работать и в случае $x_1 = \varphi(t)$

Пусть теперь $u = f(M) = f(x,y)$



x_1, y_1 – незав пер-ые!

$$\Delta f|_{M_0} \equiv f(M_1) - f(M_0)$$

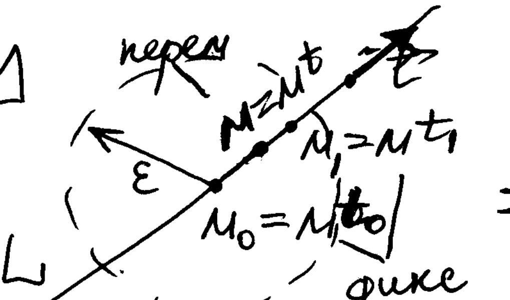
$N \in (M_0, M_1)$ – откр отр

~~$\Delta f|_{M_0} = f(M_1) - f(M_0)$, $N \in (M_0, M_1)$ – откр отр~~

Теор 19 (~~теор~~ Тейлора) Если $f(x,y)$ 3-ды ~~раза~~ диф в $O_\varepsilon(M_0)$, то $\forall$ т. $M_1 \in O_\varepsilon(M_0)$ сущ т. $N \in (M_0, M_1)$:

$$\Delta f|_{M_0} = df|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2 f|_{M_0} + \frac{1}{3!}d^3 f|_N \qquad (*)$$

Δ



Зам, что $[M_0, M_1] \subset O_\varepsilon(M_0)$

$\Rightarrow f$ ~~трижды~~ 3-ды диф на $[M_0, M_1]$

~~$M_1(x_1,y_1)$ – незав, $\forall M$~~

Обозн $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $y_1 - y_0 = \Delta y_1$, $t_1 - t_0 = \Delta t_1$

Зафикс-м т. M_1 и рассм пр-ю $L \supset [M_0 M_1]$ 7.4

Пусть $\vec{\ell} = \frac{\overrightarrow{M_0 M_1}}{|\overrightarrow{M_0 M_1}|} \equiv \{\cos\alpha, \cos\beta\}$

$$\Rightarrow L: \begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)\cos\alpha \equiv x(t) \\ y = y_0 + (t - t_0)\cos\beta \equiv y(t) \end{cases} \quad (t)$$

~~Пусть $t = t_1$~~ или $\Rightarrow x_k - x_0 = (t_k - t_0)\cos\alpha$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_k &= \Delta t_k \cos\alpha \\ \Delta y_k &= \Delta t_k \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad (\Delta t_k)$$

Обозн $M^t \equiv M(x(t), y(t)) \in L$. Тогда на ~~пр~~ L

$$f(M) = f(M^t) = f(x(t), y(t)) \equiv F(t)$$

при этом $F(t_0) = f(M^{t_0}) = f(M_0)$

$$F(t_1) = f(M^{t_1}) = f(M_1)$$

Т.к. $F(t)$ – 3-ды диф на $[t_0, t_1]$, то ~~в силу~~ по т-ме Тейлора (для $F(t)$) $\exists \tau \in (t_0, t_1)$:

$$\Delta F\Big|_{t_0} = dF\Big|_{t_0} + \frac{1}{2!} d^2F\Big|_{t_0} + \frac{1}{3!} d^3F\Big|_{\tau} \quad (\omega)$$

Рассм $dF(\Delta t)\Big|_{t_0}$, $\Delta t = t - t_0$

$$dF(\Delta t)\Big|_{t_0} \equiv F'(t_0)\Delta t \underset{\uparrow}{=} f_x(\overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{x(t_0)}}, \overset{y_0}{\overset{\shortparallel}{y(t_0)}})\, dx\Big|_{t_0} + f_y(\ )\, dy\Big|_{t_0}$$

в силу inv-ти 1-го диф-ла

где $x = x(t)$, $y = y(t)$ – завис-~~ые~~ пер-ые

$\Rightarrow dx^{(\Delta t)}\Big|_{t_0} \equiv x'(t_0)\Delta t = \cos\alpha \cdot \Delta t = x(t_0+\Delta t) - x_0 = \Delta x(\Delta t)$

$dy^{(\Delta t)}\Big|_{t_0} =$ см (t) ~~см. (t)~~ см. (Δt) $= \Delta y(\Delta t)$

~~В частности~~ Т.о.

$\Delta F(\Delta t_2)\Big|_{t_0} \equiv \cancel{F'(t_0)\Delta t_2} = f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y$

~~где $dx_1 \equiv dx(\Delta t_1)\Big|_{t_0} = \cos\alpha \cdot \Delta t_1 = \Delta x_1$~~ ~~см. (t_1)~~

В частности (при $\Delta t = \Delta t_1 \Rightarrow \Delta x = \Delta x_1$, $\Delta y = \Delta y_1$)

$\Rightarrow dF(\Delta t_1)\Big|_{t_0} = f_x(M_0)\Delta x_1 + f_y(M_0)\Delta y_1 \equiv df\Big|_{M_0}$ (1)

Зам В (1) Δx_1 и Δy_1 вновь рассм-ся как свободные пр-ия: $\Delta x_1 = \underset{\text{незав}}{x_1} - \underset{\text{фикс}}{x_0}$, $\Delta y_1 = \underset{\text{незав}}{y_1} - \underset{\text{фикс}}{y_0}$

(Мы не могли сразу же заявить, что $dx_1 \equiv \Delta x_1$, $dy_1 \equiv \Delta y_1$, т.к. x_1 и y_1 рассм-сь (пусть и временно), как зн-ия ф-й $x(t)$ и $y(t)$ при $t = t_1$, а не как незав-ые арг-ты)

(Мы фикс-ли x_1 и y_1 для того, чтобы иметь возм-ть рассм-ть их как зн-ия ф-й $x(t)$ и $y(t)$; после того как мы перестаём их так воспр-ть, соглашение о фиксации теряет силу)

Рассм $d^2F_{t_0}(\Delta t)\big|_{t_0}$

$$d^2F(\Delta t)\Big|_{t_0} \equiv F''(t_0)\Delta t^2 = f_{xx}(M_0)dx^2 +$$

$$+ 2f_{xy}(M_0)dxdy + f_{yy}(M_0)dy^2 + f_x'(M_0)\underbrace{d^2x}_{0} + f_y(M_0)\underbrace{d^2y}_{0}$$

$$d^2x \equiv x''(t_0)\Delta t^2 = 0 = d^2y$$

ан-но

В частности (при $\Delta t = \Delta t_1 \Rightarrow dx \equiv \Delta x_1 = \Delta x_1, dy = \Delta y_1$)

$$d^2F(\Delta t_1)\Big|_{t_0} = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{M_0} \equiv d^2f\Big|_{M_0} \quad (2)$$

Ан-но (учитывая, что $d^3x = d^3y = 0$)

$$d^3F(\Delta t_1)\Big|_{\tau} \equiv \cancel{F'''(\tau)\Delta t_1^3} = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\Big|_{N} \equiv \quad (3)$$

$\equiv d^3f\big|_N$, где $N \equiv M^{\tau} \in (M_0, M_1)$, т.к. $\tau \in (t_0, t_1)$

(1), (2), (3) $\rightarrow$ (0)

$$\Delta F\Big|_{t_0} \equiv F(t_1) - F(t_0) = f(M_1) - f(M_0) \equiv \Delta f\Big|_{M_0} =$$

$$= \underbrace{df\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2f\Big|_{M_0} + f(M_0)}_{P_2(M_0, M_1) \equiv P_2(M_1)} + \underbrace{\frac{1}{3!}d^3f\Big|_N}_{R_3(M_0, M_1, N) \equiv R_3(M_1)} \quad \Delta$$

$P_2(M_0, M_1)$: M_0 фикс

$(R_3 = f - P_2)$

$N \in \cancel{(M_0, M_1) \Rightarrow N = N(M_1)}$

$(R_3(M_1) = f(M_1) - P_2(M_1))$

— мн-н Тейлора — ост-ный член в форме Л-жа

7.7

Зам Обычно вместо $M_1(x_1, y_1)$ пишут $M(x,y)$

$\Rightarrow f(M) = P_n(M) + R_{n+1}(M)$ – ф-ла Тейлора

(мы д-ли для $n=2$)

$P_n(M) = P_n(\Delta x, \Delta y)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$

Зад-ие Убедиться, что при $n=0$ ф-ла Тейлора $\to$ ф-лу Лагранжа:

$f(x,y) - f(x_0, y_0) = f_x(\underbrace{x_0 + \theta\Delta x}_{\xi}, \underbrace{y_0 + \theta \Delta y}_{\eta})\Delta x + f_y(-\text{"}-)\Delta y$, $\theta \in (0,1)$

Теор 19' (Тейлора-Пеано) Пусть $u(x,y)$:

1) $n-1$ раз диф в нек окр т. M_0

2) n раз диф в т M_0

$\Rightarrow u(M) = P_n(M) + \bar{\bar{o}}(\rho^n)$, при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$

Δ (Без д-ва)

1) $u = e^{x+y}$, $M_0(0,0)$ – ф-ла Маклóрена $\Rightarrow \Delta x = x$, $\Delta y = y$

$u(0,0) = 1 = u_x(0,0) = u_y(0,0) = \dots$

$\Rightarrow u(x,y) = 1 + [1 \cdot \underbrace{x}_{\sim\rho} + 1 \cdot \underbrace{y}_{\sim\rho}] + \bar{\bar{o}}(\rho)$

(можно и по-другому – на семинарах)

$+ \frac{1}{2}[1 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 1 \cdot y^2] + \bar{\bar{o}}(\rho^2)$