Лекция 8

§9 Формула Тейлора

Вспомним ф-лу Тейлора для случая ф-ии одного арг-та:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\Delta x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\Delta x^{n+1}$$

$\Delta f\big|_{x_0} =$ —"—

$\Delta x = x_1 - x_0$, $\xi \in (x_0, x_1)$, $x_1 \in O_\delta(x_0)$

Заметим, что ф-ла Тейлора спр-ва для совершенно произвольных x_1 из $O_\delta(x_0)$ (или, что то же самое, для совер-но пр-льных Δx из $O_\delta(0)$), ~~т.е.~~ а значит она работает как в случае, когда x_1 – независимый арг-нт, так и в случае, когда x_1 – некот-я ф-ия

Если x – незав-я переменная, то $\Delta x \equiv dx$ и

$$f^{(k)}(x_0)\cdot(\Delta x)^k = f^k(x_0)dx^k \equiv d^k f(\Delta x)\Big|_{x_0}$$

Пусть x – зависимая перем-ая: $x = x(t)$

$$\Rightarrow f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)[dx + \bar{\bar{o}}(dt)] = f'(x_0)dx + \square =$$

$= df|_{x_0} + \boxed{} \neq df|_{x_0}$

Введём обозначение: $\Delta^k f(\Delta x)|_{x_0} \equiv f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$

В частности, ~~f'(~~

$f'(x_0)\Delta x = \Delta^1 f|_{x_0} \quad (\neq \Delta f|_{x_0} \equiv f(x_1) - f(x_0))$

Тогда формуле Тейлора можно придать вид

$$\Delta f|_{x_0} = \Delta^1 f|_{x_0} + \frac{1}{2!}\Delta^2 f|_{x_0} + \dots + \frac{1}{n!}\Delta^n f|_{x_0} + \frac{1}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f|_{\xi} \qquad (*)$$

Пример

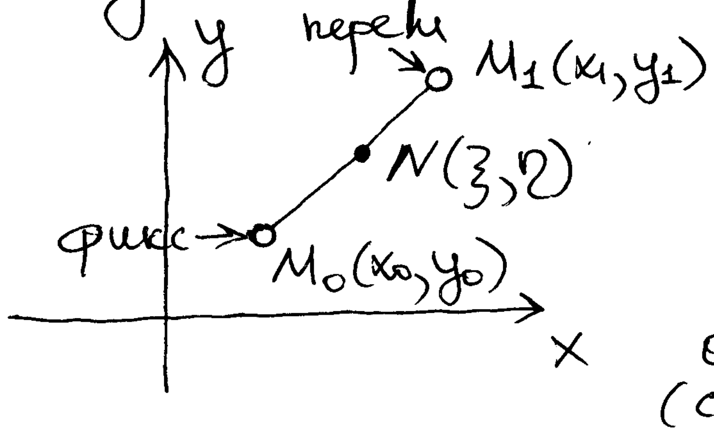
$$e^{\sin t} = e^{x(t)} \overset{t_0=0 \Rightarrow x_0=0}{=} 1+\Delta x + \underline{\underline{O}}(\Delta x^2) = 1 + [\sin t - \sin 0] + \underline{\underline{O}}(\sin^2 t) =$$

$$= 1 + t + \underline{\underline{o}}(t^3) + \underline{\underline{O}}(t^2) = 1+t+\underline{\underline{O}}(t^2)$$

Зам Если x – незав перем-ая, то $\Delta^k f|_{x_0} = d^k f|_{x_0}$

Оказывается, ф-ла (*) явл-ся универсальной (в том смысле, что работает и в случае ф-ии многих перем-ых)

Пусть теперь $u = f(x,y)$



$\Delta x = x_1 - x_0$

$\Delta y = y_1 - y_0$

$N \in$ отр(M_0, M_1)

открытый отрезок (с выколотыми концами)

Запишем ф-лу Тейлора для ф-ии f (пока без док-ва):

многочлен Тейлора с центром в т. M_0

$$f(M_1) = [f(M_0) + f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2} f_{xx}(M_0)\Delta x^2 + f_{xy}(M_0)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2} f_{yy}(M_0)\Delta y^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{i!\,j!} f_{x^i y^j}(M_0)\Delta x^i \Delta y^j + \dots + \frac{1}{n!} f_{y^n}(M_0)\Delta y^n] +$$

$$+ R_{n+1}(M) = P_{n\cancel{+1}}(M_1) + \underline{\underline{O}}(\rho^{n+1}),\ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Если x и y — незав-ые перем-ые, то $\Delta x \equiv dx$, ~~и~~ $\Delta y \equiv dy$ и

$$\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\Big|_{M_0} \equiv d^k f\Big|_{M_0}$$

Пусть x и y — зависимые перем-ые

$$\Rightarrow f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y = f_x(M_0)(dx + \overline{\overline{o}}) +$$

$$+ f_y(M_0)(dy + \overline{\overline{o}}) = f_x(M_0)dx + f_y(M_0)dy + \square =$$

$$= df\Big|_{M_0} + \square \neq df\Big|_{M_0}$$

Введём обозначение

$$\Delta^k f(\Delta x, \Delta y)\Big|_{M_0} \equiv \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\Big|_{M_0}$$

В частности $f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y = \Delta^1 f\Big|_{M_0}$

$(\neq \Delta f\Big|_{M_0} \equiv f(M) - f(M_0))$

Тогда формуле Тейлора можно придать вид

$$\Delta f|_{M_0} = \Delta^1 f|_{M_0} + \frac{1}{2!}\Delta^2 f|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!}\Delta^n f|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f|_{N} \quad (*)$$

(ф-ла Тейлора n-го порядка для ф-ии f с центром в т. M_0)

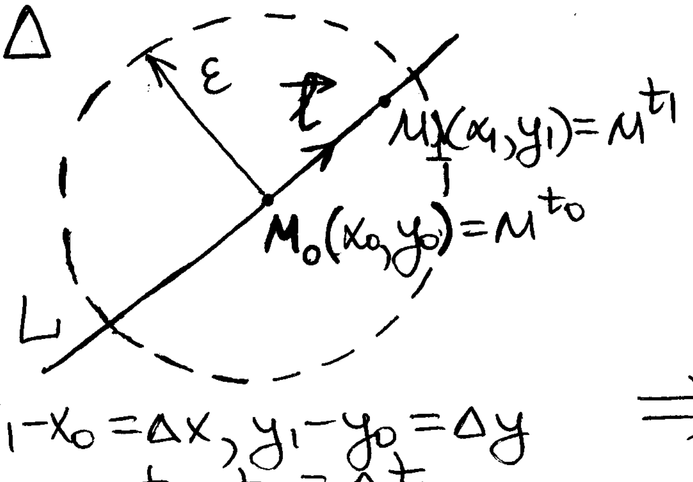
Зам Если x и y незав перем-ые, то

$$\Delta^k f|_{M_0} = d^k f|_{M_0}$$

Теор 19 (теор Тейлора)

Если ф-ия $f(x,y)$ $(n+1)$ раз диф-ма в $O_\varepsilon(M_0)$, то $\forall$ т. $M_1 \in O_\varepsilon(M_0)$ сущ-ет т. $N \in (M_0, M_1)$: спр-ва ф-ла $(*)$

Δ



Зафикс-ем $\forall$ т. $M_1 \in O_\varepsilon(M_0)$ (вместо $O_\varepsilon(M_0)$ можно брать $\forall$ выпуклую окрестность т. M_0)

$\Rightarrow$ отр $[M_0 M_1] \in O_\varepsilon(M_0)$

$x_1 - x_0 = \Delta x$, $y_1 - y_0 = \Delta y$

$t_1 - t_0 = \Delta t$

Рассм-м вектор $\vec{l} = \frac{\overrightarrow{M_0 M}}{|\overrightarrow{M_0 M}|} \equiv \{\cos\alpha, \cos\beta\}$

и прямую $L: \begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)\cos\alpha \\ y = y_0 + (t - t_0)\cos\beta \end{cases}$

соедин-ую т-ки $M_0 \equiv M^{t_0}$ и $M_1 \equiv M^{t_1}$

При $t = t_1$ имеем

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = (t_1 - t_0)\cos\alpha \\ y_1 - y_0 = (t_1 - t_0)\cos\beta \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta x = \Delta t \cos\alpha \\ \Delta y = \Delta t \cos\beta \end{cases} \qquad (1)$$

На прямой L

$$u = f(M^t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) \equiv F(t),$$

пр этом $F(t_0) = f(M^{t_0}) = f(M_0)$, $F(t_1) = f(M^{t_1}) = f(M_1)$

Т.к. $F(t)$ — $(n+1)$ раз диф-ма в $O_\varepsilon(t_0)$ (предполагается, что мы, применив матинд-ию, док-ли утв-ие об n-кратной диф-ти сложной ф-ии) и т.к. t — незав-ая перем-ая, то, применяя ф-лу Тейлора n-го порядка к ф-ии $F(t)$, одного арг-та, имеем

$$\Delta F\big|_{t_0} = dF\big|_{t_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n F\big|_{t_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F\big|_{\tau}, \qquad (2)$$

где $\tau \in (t_0, t_1)$

Рассм-м $dF\big|_{t_0}$ — Ключевой момент док-ва

$$dF\big|_{t_0} = f_x(M_0)\,dx\big|_{t_0} + f_y(M_0)\,dy\big|_{t_0}$$

$$dx\big|_{t_0} = x'(t_0)\,dt = \cos\alpha\,dt = \cos\alpha\,\Delta t \overset{(1)}{=} \Delta x\big|_{t_0}$$

$$dy\big|_{t_0} = \Delta y\big|_{t_0}$$

Тогда лучше писать

$$dF|_{t_0} = f_x(M_0)\,\Delta x + f_y(M_0)\,\Delta y = \Delta^1 f|_{M_0}$$

Зам В последнем соотношении Δx "$x_1 - x_0$" и Δy "$y_1 - y_0$" отвечают $\Delta t = t_1 - t_0$, т.е. "конечному" прир-ию арг-та t (в будущем, чтобы дополн-но это подчеркнуть, заменить $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ на $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta t_1$ и написать $dF(\Delta t_1)|_{t_0}$), а след-но должны рассм-ся как независимые арг-ты (ибо $M_1(x_1, y_1)$ предпол-ся совершенно произв-ой т-ой из $O_\varepsilon(M_0)$) (в отличие от промежуточных Δx и Δy, ~~отв~~ — прир-ий, отв-их $\Delta t = t - t_0$, кот-ые, разум-ся, опр-ся выбором ф-ий $x(t)$ и $y(t)$, задающих кривую, соед-ую т-ки M_0 и M_1).

Вообще, $x(t)$, $y(t)$ — технические ф-ии и $\Rightarrow dx(t)$ и $dy(t)$ в идеале должны исчезнуть в окончательном ответе (что и происходит, т.к. благодаря линейности $x(t)$ и $y(t)$ д-лы $dx(t)$ и $dy(t)$ "переходят" в прир-ия ("превращаются") Δx и Δy)

Рассм-м $d^2F|_{t_0}$

$$d^2F|_{t_0} = f_{xx}(M_0)\,dx^2 + 2f_{xy}(M_0)\,dx\,dy + f_{yy}(M_0)\,dy^2 +$$

$+f_x(M_0)d^2x+f_y(M_0)d^2y$

$d^2x \equiv x''(t_0)dt^2=0=d^2y$, $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$

$\Rightarrow d^2F\big|_{t_0}=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\big|_{M_0}\equiv \Delta^2 f\big|_{M_0}$

Ан-но (по индукции)

$\forall k=\overline{1,n} \Rightarrow d^kF\big|_{t_0}=\Delta^k f\big|_{M_0}$, $d^{n+1}F\big|_{\tau}=\Delta^{n+1}f\big|_{N}$, (3)

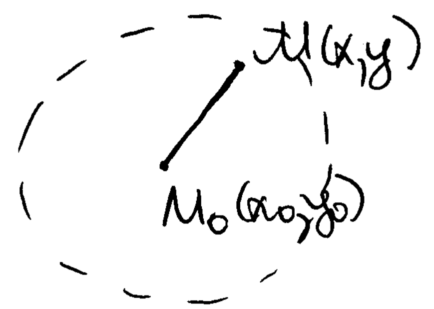
где $N=M^\tau$ (т.к. $\tau\in(t_0,t_1)$, то $M^\tau\equiv N\in(M^{t_0},M^{t_1})=$
$=(M_0,M_1))$

$(3)\to(2)$

$\Delta F\big|_{t_0}=\cancel{\Delta f}\, F(t_1)-F(t_0)=f(M_1)-f(M_0)=\Delta f\big|_{M_0}=$

$=\Delta^1 f\big|_{M_0}+\dots+\frac{1}{n!}\Delta^n f\big|_{M_0}+\frac{1}{(n+1)!}\Delta^{n+1}f\big|_N$ ∅

Зам 1



Обычно произвольную точку из ~~обл~~ $O_\varepsilon(M_0)$ обозначают не через $M_1(x_1,y_1)$, а через $M(x,y)$
$M_1(x_1,y_1)\to M(x,y)$. Тогда для случая незав-ых пер-ых x и y формулу Тейлора можно записать в след-м виде

$u(x,y)=P_n(x,y)+R_{n+1}(x,y)=P_n(M)+R_{n+1}(M)$

где $P_n=u(x_0,y_0)+du\big|_{(x_0,y_0)}+\dots+\frac{1}{n!}d^nu\big|_{(x_0,y_0)}$ — многочлен Тейлора

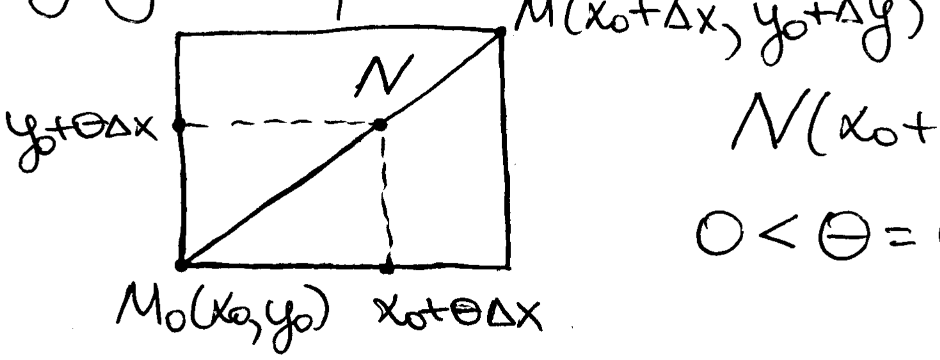
$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u \Big|_N$, $N \in M_0M \Rightarrow N = N(M) \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{n+1} = R_{n+1}(N(M)) = R_{n+1}(M)$

— остаточный член в форме Лагранжа

Зам 2 Тейлор при $n=0$ = Лагранж

При $n=0$ ф-ла Тейлора переходит в формулу Лагранжа:



одно и то же!

$N(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$

$0 < \theta = \theta(\Delta x, \Delta y) < 1$

$\Delta u \Big|_{M_0} = du \Big|_N \iff f(M) - f(M_0) = f_x(N)\Delta x + f_y(N)\Delta y$

или $f(x,y) - f(x_0,y_0) =$

$= f_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y$

Теор 19' Если ф-ия $u(M)$ n раз диф-ма в т. M_0, то

$$\Delta u \Big|_{M_0} = P_n(M) + \bar{\bar{o}}(\rho^n)$$

Δ Без док-ва

Пример $u = e^{x+y}$

$u(0,0) = e^0 = 1 = u_x(0,0) = u_y(0,0)$

$$\Rightarrow u(x,y) = 1 + 1\cdot\Delta x + 1\cdot \Delta y + \underline{\underline{O}}(\rho^2) =$$

$$= 1 + x + y + \underline{\underline{O}}(x^2+y^2),\ (x,y)\in O_\varepsilon(0,0)$$

(оценка с $\underline{\underline{O}}$-им легко вытекает из ф-лы Тейлора с остат-ым членом в форме Л-жа)

Тейлор с центром $M_0(0,0)$ = Маклорен

Другие способы

1) $x+y = t(x,y)$

$$u = 1+t+\dots+\frac{t^n}{n!}+\underline{\underline{O}}(t^{n+1}) = 1+\dots+\frac{(x+y)^n}{n!}+$$
$$+\underline{\underline{O}}((x+y)^{n+1})$$

Зам $|x|,|y|\le\rho \Rightarrow \underline{\underline{O}}(x) = \underline{\underline{O}}(\rho),\ \underline{\underline{O}}(y) = \underline{\underline{O}}(\rho) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\underline{O}}(x+y) = \underline{\underline{O}}(x) + \underline{\underline{O}}(y) = \underline{\underline{O}}(\rho) \Rightarrow \underline{\underline{O}}((x+y)^{n+1}) = \underline{\underline{O}}(\rho^{n+1})$$

2) $e^x = 1+x+\underline{\underline{O}}(x^2),\ e^y = 1+y+\underline{\underline{O}}(y^2)$

$$\Rightarrow e^{x+y} = e^x e^y = 1+x+y+\underbrace{xy}_{\underline{\underline{O}}(\rho^2)}+\dots = 1+x+y+\underline{\underline{O}}(\rho^2)$$

§10 Локальный экстремум

Пусть $u = f(M): D_f \supset$ нек окр т. M_0

Опр-ие лок-го экстремума полностью ан-но опр-ию экстремума ф-ии одной перем-ой

Опр П. M_0 наз т. лок min, если ~~$\exists O_\varepsilon$~~
$\exists O_\varepsilon(M_0): \forall M \in O_\varepsilon(M_0) \cap D_f \Rightarrow f(M) \geq f(M_0)$

Если $f(M) \leq f(M_0)$, то лок max
лок (min + max) = лок экстремум

Теорема 20 (необх усл экстр-ма) Пусть
1) $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет экстр в т. $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$
2) в т. M_0 $\exists$-ет $\frac{\partial u}{\partial x_i}$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0) = 0$

Δ Док-ть сам-но

Пример 1 $u = x^2 + |y|$

$M_0(0,0)$ – лок min
↑
даже глоб-ый

$\Rightarrow u_x(0,0) = 2x\Big|_{x=0} = 0$

В то же время $u_y(0,0) = \varnothing$

Вообще, если

M_0 – т-ка лок-го min-ма $\Rightarrow \forall i = \overline{1,m} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0) = \left[\begin{array}{l} 0 \\ \varnothing \end{array}\right.}_{\text{точки возможного экстремума}}$