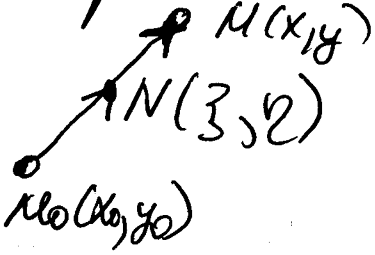
8.0

Сл-ие теор Тейлора при $n=0$

ф-ла Тейлора $\to$ ф-лу Лагранжа

$$\Delta f(M) = \underbrace{f(M_0)}_{P_0} + \underbrace{df\big|_N}_{R_1}$$



$$\overrightarrow{M_0N} = \theta\cdot\overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \{\xi-x_0, \eta-y_0\} = \theta\{\Delta x, \Delta y\}$$

$$\Rightarrow \xi = x_0+\theta\Delta x,\ \eta = y_0+\theta\Delta y,\ 0<\theta<1 \Rightarrow$$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = f_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(-''-)\Delta y$$

Теор 19' (Тейлора-Пеано) Пусть $u(x,y)$:

1) n-р раз дифф в нек окр т. M_0

2) n раз дифф в т. M_0

$$\Rightarrow u(M) = P_n(M) + \underbrace{\bar{\bar{o}}(\rho^n)}_{\text{форма Пеано}} \text{ при } \rho \equiv \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \to 0$$

{Без д-ва}

① $u = e^{x+y}$, $M_0(0,0)$ – ф-ла Маклорена $\Rightarrow \Delta x = x,\ \Delta y = y$

$$u(0,0) = 1 = u_x(0,0) = u_y(0,0) = \ldots$$

$$\Rightarrow u(x,y) = 1 + [1\cdot \cancel{\Delta}x + 1\cdot \cancel{\Delta}y] +$$

$$+ \frac{1}{2}[1\cdot \cancel{\Delta}x^2 + 2\cdot 1\cdot \cancel{\Delta}x\,\cancel{\Delta}y + 1\cdot \cancel{\Delta}y^2] + \bar{\bar{o}}(\rho^2) = \bar{\bar{o}}(x^2+y^2)$$

(Можно и по-другому – на семинарах)

§10 Локальный экстремум

Пусть $u = f(M) = f(x_1, x_2)$: $D_f \supset$ окр т. M_0

Опр Т. M_0 наз т. лок min ф-ии u, если

$\exists \delta > 0 : \forall M \in O_\delta(M_0) \Rightarrow f(M) \geq f(M_0)$

(лок min + max ≡ лок экстр-м)

Теор 20 (необх усл лок экстр-ма) Пусть $u(M)$:

1) имеет лок экстр в т. M_0 2) сущ $\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0) = 0$ ~~(∃ лок экстр)~~

Д-ть сам-но

(1) $u = x^2 + |y|$, $M_0(0,0)$

M_0 – т. лок min $\Longrightarrow u_x(0,0) = 2x\big|_{x=0} = 0$

При этом $u_y(0,0) = \varnothing$ т-ки возм-го экстр-ма

Зам M_0 – т. лок экстр $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0) = \left[\begin{array}{l} 0 \\ \varnothing \end{array}\right.$

Сл-ие теор 20 Пусть $u(M)$:

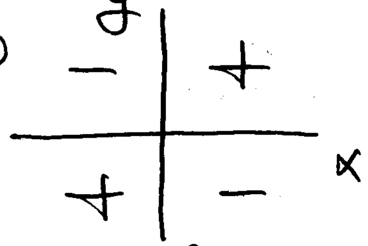
1) имеет лок экстр в т. M_0 2) диф в т. M_0

$\Rightarrow du(dx_1, dx_2)\big|_{M_0} = \underbrace{u_{x_1}(M_0)}_{0}dx_1 + \underbrace{u_{x_2}(M_0)}_{0}dx_2 \equiv 0$ $(\forall dx_1, dx_2)$

② $u = xy$ $\quad u_x \quad u_y$

$du = d(xy) = \underset{u_x}{y}\,dx + \underset{u_y}{x}\,dy \equiv 0 \Rightarrow x = y = 0$

$\Rightarrow M_0$ — т. возм экстр

Но  $\Rightarrow M_0$ — не т. экстр

Квадратичные формы

Опр Ф-я $Q(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$, где a_{ij} — числа: $a_{12} = a_{21}$, наз кв-ой формой от пер-х x_1 и x_2

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — м-ца КФ (симм)

Т.о. $Q(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

Опр Если $\forall x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q > 0$, то Q — пол опр КФ
$\quad\; < 0 \quad\quad\;$ — отр ~~опр КФ~~ } знакоопр

Опр Если: 1) $\exists x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ и $Q(x_1,x_2) = 0$

2) $\forall x_1, x_2 \Rightarrow Q \geq 0$ — неотр КФ
$\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \leq 0$ — непол ~~КФ~~ } квазизнакоопр

Все ост КФ — знакоперем ($\lessgtr 0$) ~~т.к.~~ 1) $Q(2,1) = 0$

Пример $Q(x,y) = \underset{a_{11}=1}{x^2} \underset{2a_{12}}{-4}xy + \underset{a_{22}}{4}y^2 = (x-2y)^2 \geq 0$ 2) $\Downarrow$

Q — неотр КФ,

Опр Главными минорами м-цы A наз

$\delta_1 = \det a_{11} \equiv a_{11}$, $\delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Кр-ий Сильвестра (знакоопр-ти КФ):

1) Q – пол опр $\Leftrightarrow$ $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ $(>, >, \ldots)$

2) Q – отр опр $\Leftrightarrow$ $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0$ $(<, >, \ldots)$

Дост-ые усл-ия экстр-ма

Пусть $u = f(x)$ и x_0 – т. возм экстр $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$$\Delta u|_{x_0} = \cancel{du|_{x_0}}^{\,0} + \frac{1}{2} d^2u|_{x_0} + \bar{\bar{o}}(\Delta x^2)$$

$$\bar{\bar{o}}(\Delta x^2) = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x^2$$

$$d^2u|_{x_0} = f''(x_0)dx^2 \equiv Q(dx)$$

Если $f''(x_0) > 0$ (т.е. Q – пол опр), то

$$\Delta u|_{x_0} = \Delta x^2 \underbrace{\left[\frac{f''(x_0)}{2} + \underset{\text{б.м.}}{\alpha(\Delta x)}\right]}_{>0 \text{ при малых } \Delta x} \geq 0 \Rightarrow x_0 \text{ – т. лок } \min$$

(Этот подход обобщ-ся на случай многих пер-х)

Теор 21 (дост усл-я экстр-ма) Пусть:

1) $u(M)$ дифф в нек окр т. $M_0(x_0, y_0)$

2) $u(M)$ 2-ды дифф в т. M_0

3) M_0 – т. возм экстр $(du|_{M_0} \equiv 0)$

4) $d^2u(dx, dy)|_{M_0}$ – пол опр КФ

$\Rightarrow M_0$ — т. лок min

Δ ~~Надо Δ-ть~~ Док-ем, что $\exists \delta > 0$:

$\forall M \in \dot{O}_\delta(M_0) \Rightarrow \Delta u|_{M_0} \equiv u(M) - u(M_0) > 0$ (строгий min)

Пусть $M = M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

В силу 1) и 2) по теор 19' (при $n=2$)

$$\Delta u|_{M_0} = \underbrace{du|_{M_0}}_{0 \text{ по усл } 3)} + \frac{1}{2} d^2u|_{M_0} + \underbrace{\bar{\bar{o}}(\rho^2)}_{\alpha\cdot\rho^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{[\overbrace{u_{xx}(M_0)}^{a_{11}}dx^2 + 2\overbrace{u_{xy}(M_0)}^{a_{12}}dx\,dy + \overbrace{u_{yy}(M_0)}^{a_{22}}dy^2]}+$$

$$+\alpha\cdot\rho^2 = \frac{1}{2}Q(dx, dy) + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\rho \qquad (1)$$

где Q — пол опр по усл 4)

α — б.м. при $\Delta x, \Delta y \to 0$

Т.к. $dx^2 + dy^2 = \rho^2$, то $dx = \rho\cos\varphi$, $dy = \rho\sin\varphi$

$$\Rightarrow Q \equiv a_{11}dx^2 + 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dy^2 =$$

$$= \rho^2\underbrace{(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)}_{\equiv g(\varphi)} =$$

$$= \rho^2 g(\varphi) > 0 \text{ при } \rho \neq 0,\ \varphi \in \mathbb{R} \text{ (т.к. } Q \text{ — пол опр)}$$

$\Rightarrow g(\varphi) > 0$ при $\varphi \in \mathbb{R}$, в т.ч. при $\varphi \in [0, 2\pi]$

Альтернативный способ получения оценки (г) (без 2-й т-мы Вейерштрасса) 8.4+

Пусть $\sin^2\varphi \geq 1/2$. Тогда

$$Q = \rho^2 \underbrace{\sin^2\varphi}_{\geq \frac{1}{2}} (\underbrace{a_{11}}_{\delta_1 > 0} \underbrace{ctg^2\varphi}_{t^2} + 2a_{12} \underbrace{ctg\varphi}_{t} + a_{22}) \equiv q(t)$$

$\delta_1 > 0 \Longrightarrow \cup$

Т.к. Q – пол опр $\Rightarrow$ по кр Сильвестра

$\delta_1 = a_{11} > 0$, $\delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ $(\Rightarrow a_{22} > 0)$

$$t_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{\cancel{2}a_{12}}{\cancel{2}a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad q_в = q_{min} =$$

$$= \cancel{a_{11}} \frac{a_{12}^2}{a_{11}^{\cancel{2}}} - 2a_{12}\frac{a_{12}}{a_{11}} + a_{22}^{\backslash a_{11}} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \equiv 4m_1 > 0$$

$$\Rightarrow Q \geq \rho^2 \frac{1}{2} 4m_1 = 2m_1\rho^2$$

Пусть теперь $\sin^2\varphi < 1/2 \Rightarrow \cos^2\varphi \geq 1/2$, а значит

$$Q = \rho^2 \underbrace{\cos^2\varphi}_{\geq 1/2} (\underbrace{a_{22}}_{\overset{\vee}{0}} \underbrace{tg^2\varphi}_{t^2} + 2a_{12}\underbrace{tg\varphi}_{t} + a_{11}) \geq (\text{ан-но})$$

$\geq 2m_2\rho^2$, где $m_2 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} > 0$

Положим $m \equiv \min\{m_1, m_2\} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q \geq 2m\rho^2 \quad (г)$$

8.5

Т.к. $g(\varphi)$ непр, то по 2-й т. Вей-са она дост-ет inf-ма на $[0,2\pi]$, т.е.

$$\exists \varphi_0 \in [0,2\pi]: \inf_{[0,2\pi]} g(\varphi) = g(\varphi_0) > 0$$

$$\left(\equiv \min_{[0,2\pi]} g(\varphi)\right)$$

а значит (по опр inf)

$$\forall \varphi \in [0,2\pi] \Rightarrow g(\varphi) \geq g(\varphi_0) \equiv 2m > 0$$

Но тогда (поск-ку при $\varphi \in [0,2\pi]$ охват-ся **все** зн-ия dx и dy) пол-ся, что

$$\forall dx, dy \Rightarrow Q(dx,dy) \geq 2m\rho^2 \qquad (2)$$

Вернёмся к (1)

$$\Delta u\big|_{M_0} = \frac{1}{2}\underbrace{Q}_{\geq 2m\rho^2} + \alpha\cdot\rho^2 \underset{(2)}{\geq} \rho^2[m + \alpha(\Delta x, \Delta y)] \qquad (3)$$

Рассм ф-ю α. Зам, что

$$\Delta x, \Delta y \to 0 \Leftrightarrow M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \to M_0(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x, \Delta y) \equiv \alpha(M) \to 0,\ M \to M_0$$

$\cancel{\to 0,\ M \to M_0}$

(зад-ие Δx и $\Delta y \Leftrightarrow$ зад-ию т-ки M)

Но это значит, что (по опр ~~бит-а~~) ~~(считаем, что $O_\delta(M_0) \subset D_u$)~~

$$\forall \underset{m \text{ из } (3)}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \forall M \in \dot{O}_\delta(M_0) \cap \cancel{D_u} \Rightarrow |\alpha(M)| < \underset{m}{\varepsilon}$$

(считаем, что $O_\delta(M_0) \subset D_u$) ~~т.к. $\alpha(M_0)=0$~~

т.е., что $\exists \delta>0: \forall M \in \mathring{O}_\delta(M_0) \Rightarrow \underbrace{-m<\alpha(M)}<+m \Rightarrow$ 8.6

$\Rightarrow \Delta u|_{M_0} \overset{(3)}{=} \underbrace{\rho^2}_{>0}[m+\underbrace{\alpha(M)}_{>-m}] > 0$ ~~(=0 лишь при $\rho=0$)~~

$\Rightarrow M_0$ – т. лок min (строгого) $\blacktriangle$

Теор 22 (об отсутствии экстр-ма) Пусть вып-ны усл 1)–3) теор 21 и пусть $d^2u|_{M_0}$ – знакоперем КФ $\Rightarrow M_0$ – не т. лок экстр

Без Δ-ва

(Если $d^2u|_{M_0}$ квазизнакоопр, то необх-мо иссл-ть старшие диф-лы)

3) $u=x^2+xy+y^2$

$\begin{cases} u_x = 2x+y=0 \\ u_y = x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow M_0(0,0)$ – – т. возм экстр

$d^2u|_{M_0} = \overbrace{u_{xx}(M_0)}^{a_{11}}dx^2 + 2\overbrace{u_{xy}(M_0)}^{a_{12}}dxdy + \overbrace{u_{yy}(M_0)}^{a_{22}}dy^2 \equiv Q$

$A = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}_{M_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \delta_1 = 2>0$, $\quad \delta_2 = 4-1>0$

$\Rightarrow d^2u|_{M_0}$ – пол опр $\Rightarrow M_0$ – т. лок min

(Сущ и др методы иссл-ия КФ – в данном случае d^2u – на знакоопр-ть, но о них – в курсе линала)