Лекция 9

Сл-ие (необх-ое усл-ие экстр-ма для диф-об ф-ии) Пусть ф-ия $u=f(M)$:

1) имеет экстр-м в т. M_0

2) диф-ма в т. M_0

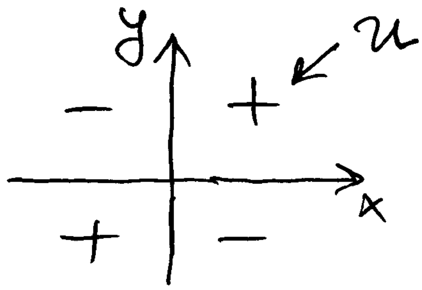
$\Rightarrow du(dx_1,\dots,dx_m)\Big|_{M_0} = \cancelto{\equiv 0}{u_{x_1}(M_0)}dx_1+\dots+$

$+\cancelto{\equiv 0}{u_{x_m}(M_0)}dx_m \equiv 0$ (т.е. $=0\ \forall dx_1,\dots,dx_m$)

Пример 2 $u=xy$

$du = d(xy) = \underbrace{\overset{u_x}{y}}\,dx + \underbrace{\overset{u_y}{x}}\,dy \equiv 0 \Rightarrow x=y=0$

$\Rightarrow M_0(0,0)$ – точка возможного экстр-ма

Но  $\Rightarrow M_0$ – не т. экстремума

Квадратичные формы

Опр Ф-ия $Q(x_1,\dots,x_m)=\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j$, где

a_{ij} – числа: $a_{ij}=a_{ji}$, наз-ся квадратичной формой (КФ) от перем-х $x_1,\dots,x_m$

Пример 1

9.2

$Q(x_1,x_2) \equiv Q(x,y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{21}yx + a_{22}y^2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ & \text{и} & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$ – м-уа КФ

(до примера)

Опр Если $\forall x_1, \dots, x_m : x_1^2 + \dots + x_m^2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q > 0$, то Q – пол-но опр-ая КФ } знако-

< 0 – отр-но опр-ая КФ } опр-ая

≥ 0 – неотр-я КФ } квазизна-

≤ 0 – непол-я КФ } коопр-ая

$\gtreqless 0$ – знакоперем-я КФ

Пример 2 $Q = \overset{a_{11}=1}{x^2} \overset{2a_{12}}{-4}xy + \overset{a_{22}}{4}y^2 = (x-2y)^2$

т.к. $Q \geq 0$ и при этом $Q(2,1) = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Опр Угловыми или главными минорами матрицы A наз-ся опр-ли

$\delta_1 = \det a_{11} = a_{11}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ & \text{и} & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \det A$

(распол-ся в верхних левых углах м-цы A)

Критерий Сильвестра знакоопр-ти КФ | 9.3

1) Q - пол опр $\Longleftrightarrow \underset{\delta_1,}{>0} \; \underset{\delta_2,}{>0} \; \underset{\delta_3,}{>0} \; \underset{\delta_4,}{>0} \ldots$

2) Q - отр опр $\Longleftrightarrow <0 \quad >0 \quad <0 \quad >0$

Идея иссл-ия на экстр-ум для $u = u(x,y)$ (в будущем лучше ограничиться аналогией с одномерным случаем)

Допустим M_0 - точка лок min

$$\underset{\uparrow \text{ в нек-й окр т. } M_0}{\Longrightarrow} \Delta u\Big|_{M_0} = \underbrace{du\Big|_{M_0}}_{0} + \frac{1}{2} d^2u\Big|_{M_0} + \bar{\bar{o}}(\rho^2) \underset{\uparrow \text{ должно быть}}{\geq} 0$$

Тогда, оказыв-ся, если

$$d^2u(dx,dy)\Big|_{M_0} = u_{xx}dx^2 + 2u_{xy}dxdy + u_{yy}dy^2 \equiv$$

$$\equiv Q(dx,dy) > 0 \text{ при } dx^2 + dy^2 \neq 0,$$

то поскольку $\bar{\bar{o}}(\rho^2) << d^2u\Big|_{M_0} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \Delta u\Big|_{M_0} = u(M) - u(M_0) > 0 \ \forall M \in \text{прокол окр т. } M_0 \ (M \neq M_0)$$
$$= 0 \text{ при } M = M_0$$

Т.о. дост-ое усл-ие лок-го min-ма — это пол-ая опр-ть второго диф-ла

Теор 21 Пусть ф-ия $u=f(M)$ дважды диф-ма в т-ке M_0 возможного экстремума. Тогда, если

$d^2u\big|_{M_0}$ – пол-но (отр-но) опр-ая КФ,

то M_0 – т. лок min (max)

Δ Для случая лок min

Надо док-ть, что $\exists O_\delta(M_0): \forall M \in O_\delta(M_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta u\big|_{M_0} \equiv f(M) - f(M_0) \geq 0$

Пусть $M_0 = M_0(x_0, y_0)$, $M = M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

$\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Воспользуемся теор-ой 19'

$$\Delta u\big|_{M_0} = \underbrace{du\big|_{M_0}}_{=0} + \frac{1}{2} d^2u\big|_{M_0} + \bar{\bar{o}}(\rho^2) =$$

$=0$ т.к. M_0 – точка возможного экстремума

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\overbrace{u_{xx}(M_0)}^{a_{11}} dx^2 + 2\overbrace{u_{xy}(M_0)}^{a_{12}} dx\,dy + \overbrace{u_{yy}(M_0)}^{a_{22}} dy^2}_{КФ \equiv Q(dx,dy)} + \bar{\bar{o}}(\rho^2)\Big]$$

КФ $\equiv Q(dx, dy)$ – пол-но опр-ая (по условию)

Обозн $\frac{dx}{\rho} \equiv h_1$, $\frac{dy}{\rho} \equiv h_2$ (при $\rho \neq 0$)

$\Rightarrow dx = h_1\rho$, $dy = h_2\rho$

$\frac{\bar{\bar{o}}(\rho^2)}{\rho^2} \equiv \alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$

$\Rightarrow \bar{\bar{o}}(\rho^2) = \alpha \cdot \rho^2$

Тогда

$$\Delta u\Big|_{M_0} = \frac{1}{2}\rho^2\left[(a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2) + \alpha\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\rho^2\left[Q(h_1, h_2) + \alpha(\rho)\right] \qquad (1)$$

Заметим, что $h_1^2 + h_2^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\rho^2} \equiv 1$

Т.е. получается, что ф-ция Q рассм-ся лишь при h_i: $h_1^2 + h_2^2 = 1$ – ур-ие сферы $\Omega_1(0)$. Но сфера – огр-ое замкнутое мн-во $\Rightarrow$ по 2-ой т. Вейерштрасса ф-ция Q достигает своего инфимума на этой сфере (или, что то же самое, имеет min-ум на $\Omega_1(0)$), т.е. $\exists\, h_1^*$ и $h_2^* \in \Omega_1(0)$:

$$\forall h_1, h_2 \in \Omega_1(0) \Rightarrow Q(h_1, h_2) \geq Q(h_1^*, h_2^*) \equiv$$

$$\overset{\text{опр}}{\equiv} \min_{\Omega_1(0)} Q \overset{\text{обозн}}{\equiv} m > 0 \qquad (2)$$

т.к. Q – пол-но опр-я КФ (ключевой момент док-ва)

Оценим $\alpha(\rho)$

Т.к. $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$ (значит $\rho \neq 0$), то

$$\forall \underset{m}{\underset{|||}{\varepsilon}} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall \rho : 0 < \rho < \delta \Rightarrow |\alpha(\rho)| < \underset{m}{\underset{|||}{\varepsilon}}$$

т.е. $\exists \delta > 0 : \forall \rho \in (0, \delta) \Rightarrow |\alpha(\rho)| < m \quad (3)$

Т.о., $\exists O_\delta(M_0) : \forall M \in \dot{O}_\delta(M_0)$ $(\rho \neq 0) \Rightarrow$

$$\underbrace{-m < \alpha} < +m$$

$$\Rightarrow \Delta u\Big|_{M_0} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\rho^2[\underset{>m}{Q} + \underset{>-m}{\alpha}] \overset{(2),(3)}{>} 0$$

Если же $M = M_0 \Rightarrow \Delta u\Big|_{M_0} = 0$

Итак, $\forall M \in O_\delta(M_0) \Rightarrow \Delta u\Big|_{M_0} \geq 0$

$\Rightarrow M_0$ – т. лок max чтд $\quad \blacktriangle$

причём строгий max-м

Теор 22 Пусть ф-ия $u = f(M)$ дважды диф-ма в т. M_0 и $d^2u\Big|_{M_0}$ – знакоперем-я КФ $\Rightarrow$ $\Rightarrow M_0$ не явл-ся т-й лок-го экстр-ма

Δ Без док-ва

Примеры

$u = x^2 + xy + y^2$ $\begin{cases} u_x = 2x + y = 0 \\ u_y = 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow M_0(0,0)$ – т-ка возм-го экстр-ма

$d^2u\big|_{M_0} = u_{xx}(M_0)dx^2 + 2u_{xy}(M_0)dxdy +$

$+ u_{yy}(M_0)dy^2 \leftarrow$ КФ

М-ца $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}_{M_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\delta_1 = 2 > 0$, $\delta_2 = 4 - 1 > 0 \Rightarrow M_0$ – т. лок $\min$

$u = x^2 + 3xy + y^2$

Действуя ан-но, получим точку $M_0(0,0)$

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\delta_1 = 2 > 0$, $\delta_2 = 4 - 9 < 0$

$\Rightarrow$ ни $\min$, ни $\max$

$u = x^2 + 2xy + y^2$ $M_0(0,0)$ – получается ан-но

$d^2u = 2dx^2 + 4dxdy + 2dy^2$

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = 0$

метод не работает

Необходимо дополн-ое иссл-ие

$d^2u = 2(dx+dy)^2 \geq 0$

при этом $d^3u = d^4u = \ldots \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_0$ – лок $\min$ (нестрогий)

(можно было сразу: $u = (x+y)^2 \geq 0$)

Разум-ся,

9.8

а) $u = x^2y^2$
б) $u = -x^2y^2$
в) $u = x^3y^3$

$M_0(0,0)$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ и при этом M_0: а) min, б) max, в) ни min, ни max

Т.о., если хотя бы одно $\delta_i = 0$, то необх-мо доп-ое иссл-ие

На будущее: ввести $D^n f$, напр $D^2 f = d^2 f + f_x d^2x + f_y d^2y$ — он обладает св-ом inv-ти формы и ф-ла Тейлора будет спр-ва и с ним

Глава X Неявные функции

§1 Неявные ф-ии, определяемые одним уравнением

Рассм-м ур-ие

$$F(x,y) = 0 \qquad (*)$$

Опр Если сущ-ет правило f, которое $\forall x \in X \mapsto y \in \mathbb{R}: F(x,y) = 0$, то говорят, что ур-ие (*) опред-ет неявную ф-ию $y = f(x)$ на мн-ве X

Т.е. $y=f(x) \Rightarrow F(f(x),x)\equiv 0$

Пример

$$x^2+y^2=1$$

$$\underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y)}=0$$

Это ур-ие задаёт ∞ число неявных ф-й, опр-ых на $[-1,+1]$. Среди них только две непр-х: $f_{1,2}(x)=\mp\sqrt{1-x^2}$

В качестве разрывной можно взять, например, такую ф-ию:

$$f_3(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0]\\ +\sqrt{1-x^2}, & x\in(0,+1]\end{cases} \quad \text{и т.д.}$$

Ясно, что таким образом можно сконструировать ∞ число разрывных неявных ф-ий