Глава X Неявные ф-ии

§1 Неявные ф-ии, опр-ые 1-м ур-ем

Пусть $F(x,y)$: $D_F \supset Q = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} \equiv X \times Y$,
где X, Y – ~~пр-ки~~ пром $\Longrightarrow$ Q – прям-к (в т.ч. ∞-й) со стор X и Y

Рассм ур-ие $F(x,y)=0$ (*)

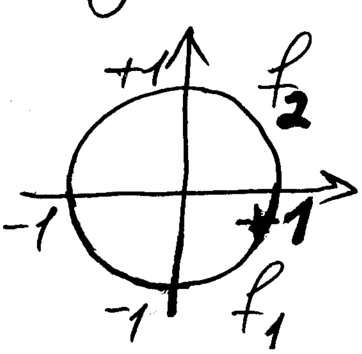
Опр Говорят, что ур-ие (*) задаёт в ~~пр-ке~~ пром Q неявную ф-ю $y=f(x)$, если:

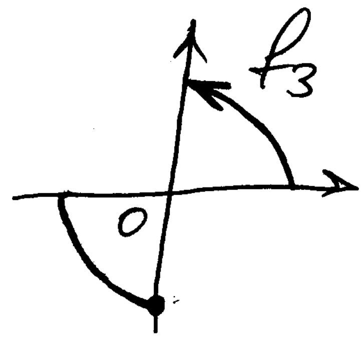
1) $D_f = X$ 2) $E_f \subset Y$ 3) $\forall x \in X \Rightarrow F(x, f(x)) = 0$

(т.о. $y=f(x)$ – одно из реш-й ур-я (*))

1) $x^2+y^2=1$

$$\underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y)}=0$$





Пусть $Q=[-1,+1]\times[-1,+1] \Longrightarrow \exists\ \infty$ много $f(x)$

Напр
$f_{1,2}(x) = \mp\sqrt{1-x^2}$ ← непр (все ост разр)

$$f_3(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0] \\ +\sqrt{1-x^2}, & x \in (0, +1] \end{cases}$$

Пусть $Q = [-1,+1]\times[0,1] \Longrightarrow \exists!\ f(x) = +\sqrt{1-x^2}$ + непр

Теор 1 (о ∃-ти и непр ~~неявной функ~~ НФ) Пусть: 9.2

1) $F(x,y)$ непр в $Q=(a,b)\times[c,d]$

2) $\forall x\in(a,b) \Rightarrow F(x,c)\cdot F(x,d)<0$

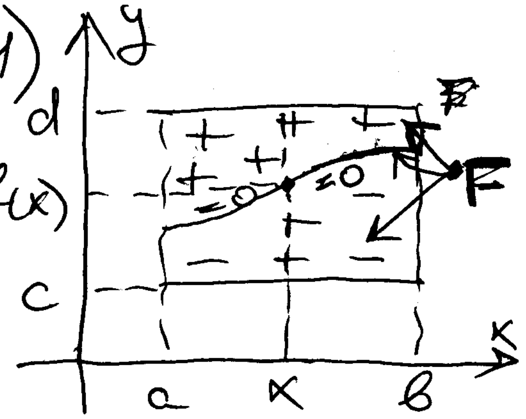
3) при всех фикс $x\in(a,b)$ ф-я $F(x,y)$ возр (убыв) ~~на [c,d]~~ по y на $[c,d]$

Тогда:

1) ур-ие (*) задаёт в Q !-ую НФ (неявную ф-ю) $y=f(x)$

2) $f(x)$ непр на (a,b)

Δ1)



Зафикс $\forall x\in(a,b)$

$\Rightarrow F(x,y)=\tilde{F}(y): D_{\tilde{F}}\supset[c,d]$

(у усл-й 1)-3) т-мы $\Rightarrow$

1) $\tilde{F}$ непр на $[c,d]$

2) $\tilde{F}(c)<0,\ \tilde{F}(d)>0$

3) $\tilde{F}$ возр на $[c,d]$

Тогда в силу 1) и 2) по теор о прох-ии непр ф-ии через нуль и в силу 3)

$$\underbrace{\exists}_{1),2)}\underbrace{!}_{3)}\, y=y^*\in[c,d] : \tilde{F}(y^*)=0 = F(x,y^*)$$

оставить [ ]

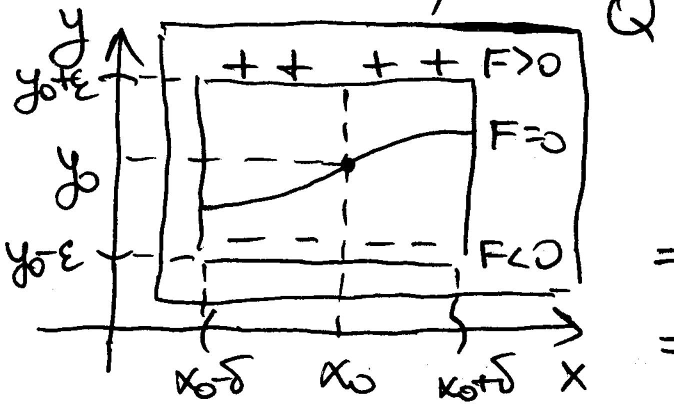
Т.о. получается, что $\forall x\in(a,b)\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\, y=y^*(x)\equiv f(x)\in[c,d] : F(x,f(x))=0 \leftarrow (*)$

оставить [ ]

т.е., что ур-ие (*) задаёт в $Q=(a,b)\times[c,d]$!-ю НФ $y=f(x)$, $(a,b)=D_f$, $[c,d]\supset E_f$ ~~Δ1)~~

Δ2) Д-м непр $f(x)$ на (a,b), т.е. $\forall x_0\in(a,b)$



Зафикс $\forall x_0\in(a,b)$

Надо пок-ть, что $\forall\varepsilon>0$

$\Rightarrow\exists\delta>0:\ \forall x\in O_\delta(x_0)\cap(a,b)$

$\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(y_0)$, $y_0=f(x_0)$

Мы знаем, что

$$\left.\begin{array}{l}F(x_0,y_0)=F(x_0,f(x_0))=0\\ F(x_0,y)\ \text{возр по } y \text{ на } [c,d]\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F(x_0,y_0-\varepsilon)<0\\ F(x_0,y_0+\varepsilon)>0\end{cases}\quad \text{при } \forall\varepsilon>0:\ (y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)\subset[c,d]$$

Зафикс $y_0-\varepsilon\Rightarrow F(x,y_0-\varepsilon)=F^{(-)}(x):\ D_{F^{(-)}}\supset(a,b)$

Зам, что

$$\left.\begin{array}{l}1)\ F^{(-)}(x_0)\equiv F(x_0,y_0-\varepsilon)<0\\ 2)\ F^{(-)}(x)\ \text{непр в т. } x_0\end{array}\right\}\Rightarrow F^{(-)}(x)\ \text{сохр отр знак в нек } O_{\delta_1}(x_0)$$

(в силу ~~Кю~~ усл 2 т-мы)

Ан-но $F^{(+)}(x)=F(x,y_0+\varepsilon)$ сохр пол знак в нек $O_{\delta_2}(x_0)$

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда

$$\forall x\in O_\delta(x_0)\Rightarrow\begin{cases}F(x,y_0-\varepsilon)<0\\ F(x,y_0+\varepsilon)>0\end{cases}$$

Нап, что $F(x,f(x))=0$

~~(Нат, что $b(x)$: $F(x, b(x)) = 0$ $\forall x \in (a,b) \supset O_\delta(x_0)$)~~

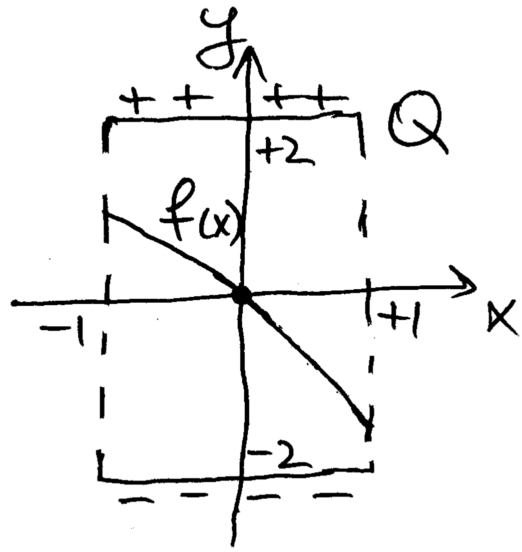
Отсюда и из возр F по y вытекает, что

$\forall x \in O_\delta(x_0) \Rightarrow y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(y_0)$ ч.т.д. ~~4~~2)

1 $x + y = \sin xy$ ~~(*)~~

$\underbrace{x + y - \sin xy}_{F(x,y)} = 0$ (*)



Проверим вып-е усл-й теор 1 в прям Q:

1) F – непр в Q

2) $\forall x \in (-1, +1) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x, -2) = \underbrace{x - 2}_{< -1} + \underbrace{\sin 2x}_{\le +1} < 0$ Ан-но $F(x, +2) > 0$ при всех $x \in (-1, +1)$

3) $F_y(x,y) = 1 \underbrace{- \overset{|\,|<1}{x} \cos xy}_{> -1} > 0 \Rightarrow F$ возр по y на $[-2, +2]$

Тогда по теор 1:

1) ур-ие (*) задаёт в $Q = (-1, +1) \times [-2, +2]$!-ю НФ $y = f(x)$

2) $f(x)$ непр на $(-1, +1)$

Вернёмся к (общему) ур-ю $F(x,y) = 0$ (*)

Теор 2 (о лок-м $\exists$-ии и непр-ти НФ). Пусть: 9.5

1) $F(x,y)$ непр в нек окр $G(M_0)$ т. $M_0(x_0,y_0)$

2) $F_y(x,y)$ опр в ~~окр~~ $G(M_0)$ и непр в т. M_0

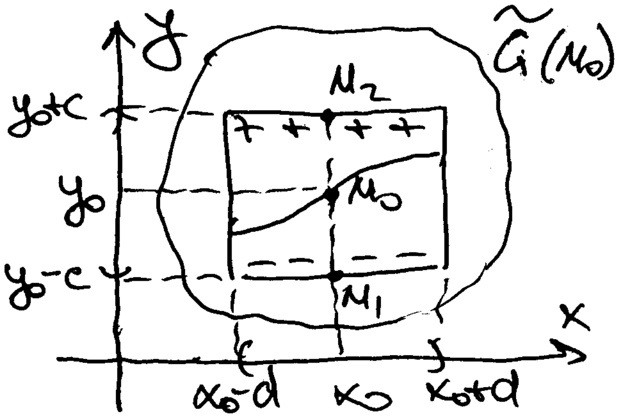
3) $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

Тогда:

1) $\exists Q=(x_0-d,x_0+d)\times[y_0-c,y_0+c]$, в кот ур-ие (*) задаёт !-ю НФ $y=f(x)$

2) $f(x)$ непр на (x_0-d,x_0+d)

Δ Т.к. согл **3)** и 2) $F_y \gtrless 0$ и непр в т. M_0, то $\exists\, \tilde{G}(M_0)\subset G(M_0)$, в кот $F_y \gtrless 0$ (пусть $F_y>0$)



Далее, из того, что $F_y(M_0)>0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow F \text{ возр по } y \text{ в т. } M_0(x_0,y_0) \\ + F(x_0,y_0)=0 \text{ (согл 3)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c>0:\ \begin{cases} F(x_0,y_0-c)<0 \\ F(x_0,y_0+c)>0 \end{cases}$$

Зафикс $y_0-c \Rightarrow F(x,y_0-c)=\bar{F}^{(-)}(x)$

Зам, что 1) $\bar{F}^{(-)}(x_0)<0$ 2) $\bar{F}^{(-)}(x)$ непр в т. x_0 (в силу усл 1 т-мы)

$\Rightarrow \bar{F}^{(-)}(x)$ сохр отр знак в нек $O_{\delta_1}(x_0)$

Ан-но $\bar{F}^{(+)}(x)=F(x,y_0+c)$ сохр пол знак в нек $O_{\delta_2}(x_0)$

Положим $d=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда

$$\forall x \in O_d(x_0) \Rightarrow \begin{cases} F(x, y_0-c)<0 \\ F(x, y_0+c)>0 \end{cases}$$

Т.о. получается, что:

1) F непр в $Q=(x_0-d, x_0+d)\times[y_0-c, y_0+c]$

т.к. она непр в $G(M_0)\supset \tilde{G}(M_0)\supset Q$

2) $\forall x\in(x_0-d, x_0+d) \Rightarrow F(x, y_0-c)\cdot F(x, y_0+c)<0$

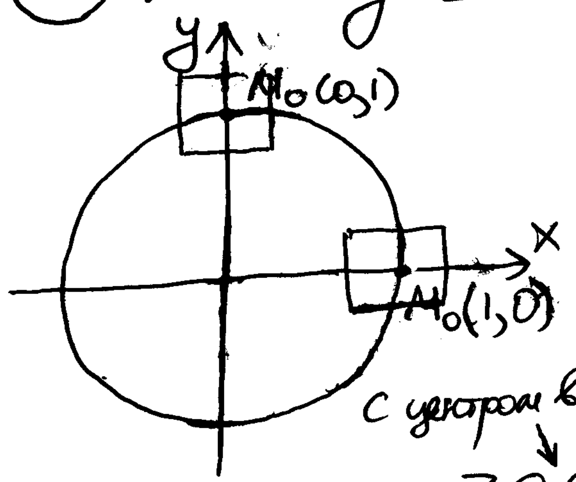
3) при всех фикс $x\in(x_0-d, x_0+d)$ ф-я F возр по y на $[y_0-c, y_0+c]$, т.к. $F_y>0$ в $\tilde{G}(M_0)\supset Q$

а значит по теор 1:

1) ур-ие (*) задаёт в Q ! НФ $y=f(x)$

2) $f(x)$ непр **на** (x_0-d, x_0+d) чтд

② $F = x^2+y^2-1=0$ (*)



Рассм т. $M_0(0,1)$:

1) F } непр на $E^2\supset\forall$ ~~окр~~ $G(M_0)$
2) F_y }

с центром в т. M_0

3) $F(0,1)=0$, $F_y(0,1)=2y|_{y=1}=2\neq 0$

$\Rightarrow$ по теор 2 $\exists Q(M_0)$, в кот (*) задаёт ! НФ $f(x)$

Рассм т. $M(1,0)$: 1), 2) — и —

3) $F(1,0)=0$, $F_y(1,0)=0$ $\Rightarrow$ теор не работает (ничего не значит!)