Лекция 10

Теор 1 (о $\exists$-ии и непр-ти неявной ф-ии)

Пусть:

1) $F(x,y)$ опр-на и непр-на в прям-ке $Q=(a,b)\times[c,d]$

2) $\forall x\in(a,b) \Rightarrow F(x,c)\cdot F(x,d)<0$

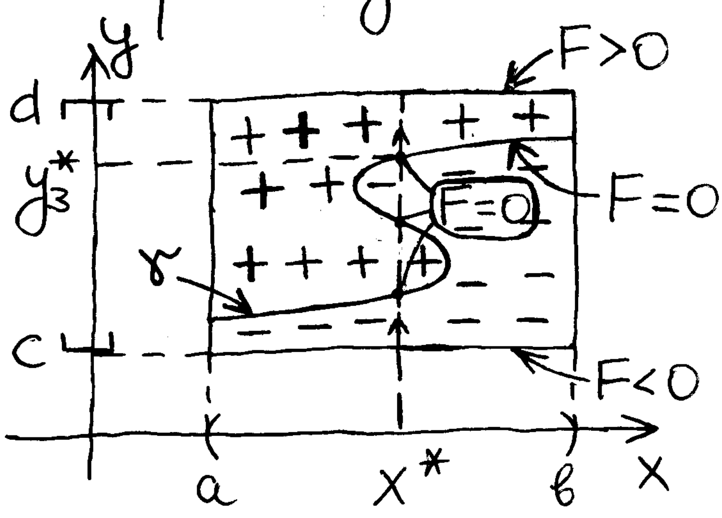
3) $\forall$ фикс $x\in(a,b) \Rightarrow F(x,y)$ – строго монотонна по y на $[c,d]$

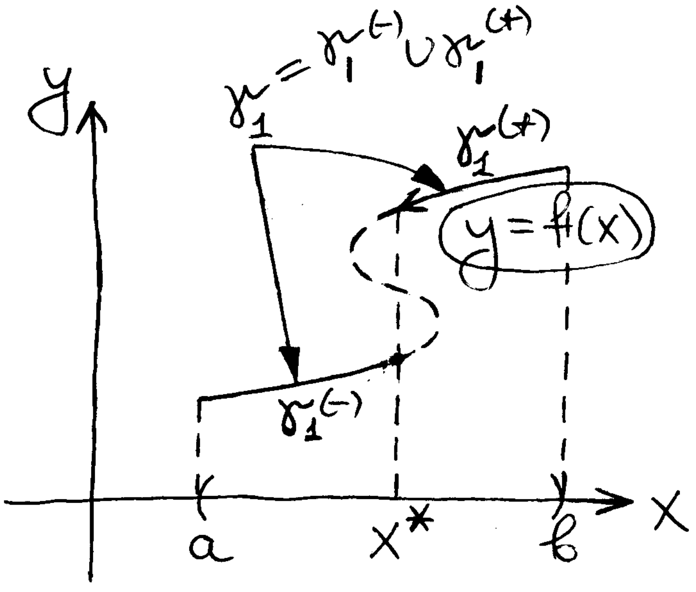
Тогда

1) ур-ие (*) ($F(x,y)=0$) опр-ет !-ую неявную ф-ию $y=f(x)$ в пр-ке Q

2) $f(x)$ непр на (a,b)

Нестрогое док-во





На левом рисунке изображён случай, когда ф-я $F(x,y)$ немонотонна по y при каждом фикс-ом x из (a,b) (в частности, при $x=x^*$). Это приводит к тому, что

$$x=x^* \longmapsto y=y_1^*, y_2^*, y_3^*$$

$\Rightarrow$ кривая γ (на которой $F=0$) не явл-ся графиком ф-ии $f(x)$ (т.к. x^* отвечают 3 значения y)

Тем не менее часть γ_1 (состоящая из 2 ветвей $\gamma_1^{(-)}$ и $\gamma_1^{(+)}$) кривой γ может служить графиком ф-ии $y=f(x)$, но такой график (как бы мы ни выбирали эту часть γ_1) всегда будет иметь разрыв в **нек** т-ке x^*

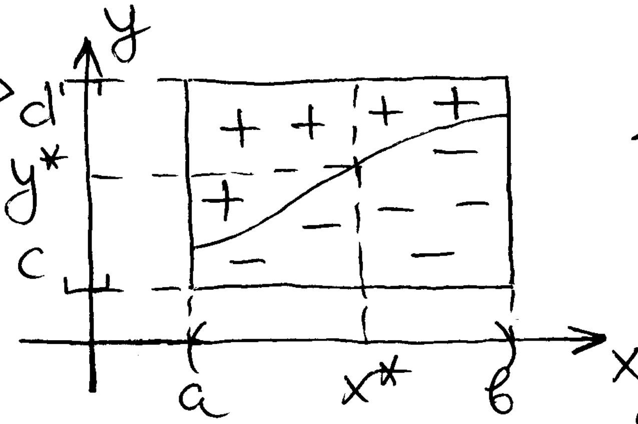
Это плохо, т.к. мы добиваемся сущ-ия непрерывной ф-ии $f(x)$. Оказывается, однако, что ~~в случае~~ для монотонной по y ф-ии F изображённый на рисунках случай расположения кривой γ невозможен:

т.к. ф-ия F растёт по y, то $\overbrace{F(y_1^*,x^*)}^{0}<$

$<\underbrace{F(y_2^*,x^*)}_{0}<\underbrace{F(y_3^*,x^*)}_{0}$ – противоречие

Строгое док-во – вставить рисунок с начала след-ей стр-цы

Δ 1) Зафикс-ем $\forall x\in(a,b) \Rightarrow F(x,y)=\tilde{F}(y)$

$\Rightarrow$ 

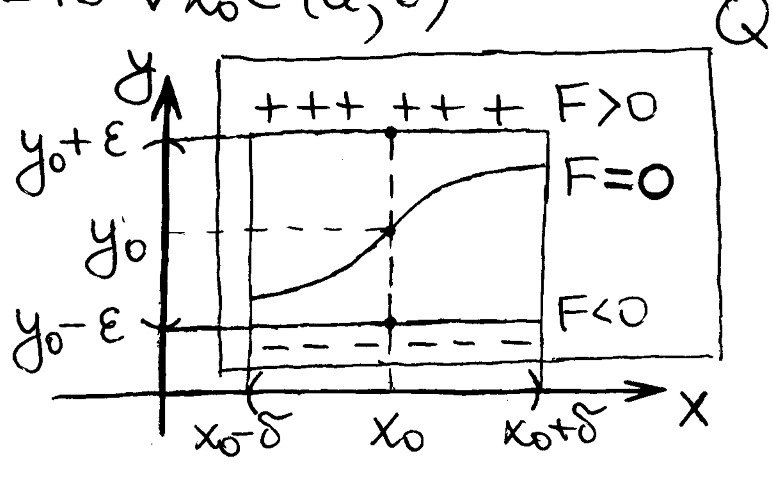
← вставка к предыдущей стр-це (здесь изображён случай возр-ей по y ф-ии F, в случае убыв-я F картинка ан-ка)

$$\left.\begin{array}{l} \tilde F(c) \lessgtr 0,\ \tilde F(d) \gtrless 0 \\ \tilde F \text{ – непр на } [c,d] \\ \tilde F \text{ – строго монот на } [c,d] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, y^* \in [c,d] : \underset{F(x,y^*)}{\underset{\parallel}{\tilde F(y^*)}} = 0$$

Т.е. получается, что $\forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists!\, y^* = y^*(x) \equiv$
$\equiv f(x) \in [c,d] : F(x, f(x)) = 0$

Итак, ур-ие $F(x,y)=0$ опр-ет !-ую неявную ф-ию $y=f(x)$ на $(a,b)\times[c,d] \equiv Q$ $\cancel{\Delta}1)$

$\Delta 2)$ Док-ем непр-ть $f(x)$ на (a,b), т.е. непр-ть $\forall x_0 \in (a,b)$



Зафикс-ем т. $x_0 \in (a,b)$
Надо пок-ть, что
$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 :$
$\forall x \in O_\delta(x_0) \cap (a,b) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(y_0)$
где $y_0 = f(x_0)$

Мы знаем, что $F(x_0, \overset{f(x_0)}{\overset{\parallel}{y_0}}) = 0$
$+ F$ – строго монот по y ← монот-ть исп-ся и при док-ве непр-ти

Пусть F возр по y

$\Rightarrow F(x_0, y_0-\varepsilon)<0, \; F(x_0, y_0+\varepsilon)>0$

Будем считать, что ε мало настолько, что $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)\subset[c,d]$

Рассм-м ф-ию $F(x, \underbrace{y_0-\varepsilon}_{\text{фикс}}) \equiv \tilde{F}(x)$ ← другая ф-я $\tilde{F}$ (не та, что была выше)

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{F}(x_0)=F(x_0, y_0-\varepsilon)<0 \\ \tilde{F}(x) \text{ непр на } (a,b) \\ \Rightarrow \text{непр в т. } x_0\in(a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{F}(x) \text{ сохр знак} \\ \text{в нек-й окр-ти} \\ \text{т. } x=x_0, \text{ т.е.} \end{array}$$

$\exists\, \delta_1>0: \forall x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \Rightarrow \tilde{F}(x)=F(x, y_0-\varepsilon)<0$

Ан-но

$\exists\, \delta_2>0: \forall x\in(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2) \Rightarrow F(x, y_0+\varepsilon)>0$

Положим $\delta\equiv\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда

$$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\equiv O_\delta(x_0) \Rightarrow \begin{cases} F(x, y_0-\varepsilon)<0 \\ F(x, y_0+\varepsilon)>0 \end{cases}$$

Напомню, что $y=f(x): F(x, f(x))=0$. Отсюда и из монотонности F по y вытекает, что

$\forall x\in O_\delta(x_0) \Rightarrow y_0-\varepsilon < f(x) < y_0+\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(y_0)$ чтд

$\cancel{\Delta}$ 2)

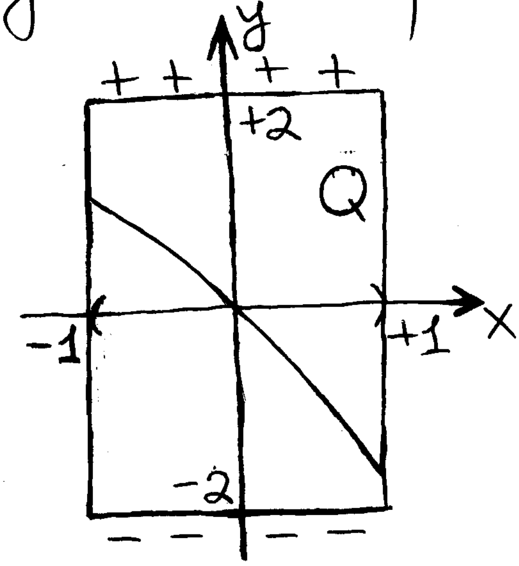
10.5

Пример (1)

$$x+y=\sin xy \overset{?}{\Longrightarrow} y=f(x) \quad (*)$$

Док-ем, что $\exists!$ решение $y=f(x)$, явл-ся непр-ой ф-ей x на инт-ле $x\in(-1,+1)$

Проверим выполнение условий теоремы 1



$F(x,y)\equiv x+y-\sin xy$

1) F − непр в Q

2) $\forall x\in(-1,+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x,-2)=\underbrace{x}_{<1}-2+\underbrace{\sin 2x}_{\le 1}<0$

$F(x,+2)=\underbrace{x}_{>-1}+2\underbrace{-\sin 2x}_{\ge -1}>0$ (или сразу >0 ан-но)

Зам Утв-ие (о противоп-ных знаках ф-ии F) справ-во для $\forall Q$ высотой $\ge 2 \Rightarrow$ реш-ие $f(x)$ ур-ия (*) будет !-ым вообще при $x\in(-1,+1)$, а не только в пр-ке Q

3) проверим монотонность по y

$F_y(x,y)=1\underbrace{-x\cos xy}_{>-1}>0 \quad \forall x\in(-1,+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ − возр по y $\forall$ фикс $x\in(-1,+1)$

Тогда по теор 1

$\Rightarrow$ в прям-ке Q $\exists!$ $y=f(x)$: $F(x, f(x)) \equiv 0$, при этом $f(x)$ – непр-я ф-ия x

(*) $F(x,y)=0$ (вернёмся к ур-ию общего вида)

как по x, так и по y

Теор 2 (локальная теор сущ-ия и непр-ти неявной ф-ии) Пусть:

1) $F(x,y)$ опр и непр в нек-й окр-ти ω т. $M_0(x_0,y_0)$

2) в окр ω $\exists$-ет $F_y(x,y)$, непр-ая в т. M_0

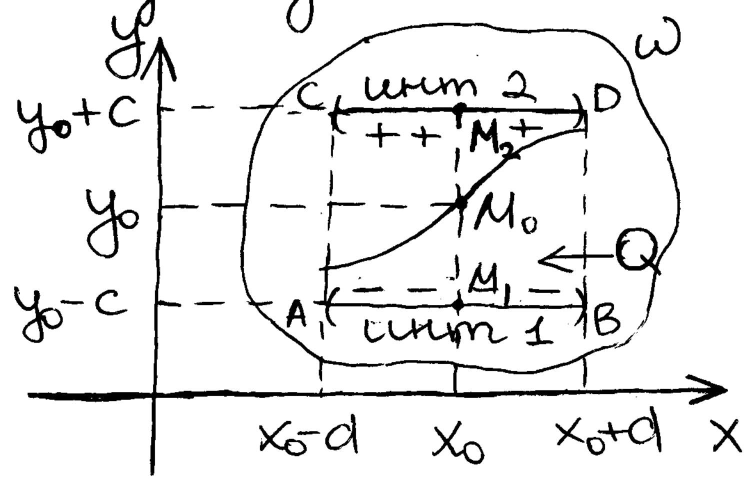
3) $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

Тогда

1) $\exists$ прям-к $Q=(x_0-d, x_0+d)\times[y_0-c, y_0+c]$, в котором ур-ие (*) опр-ет !-ую неявную ф-ию $y=f(x)$

2) $f(x)$ непр на (x_0-d, x_0+d)

Идея док-ва (ею и ограничимся)



дост малое

$\left.\begin{array}{l} F(M_0)=0 \\ F_y(M_0)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c$:

для опред-ти

$F(M_1)<0$, $F(M_2)>0$

F непр по x $\Rightarrow$

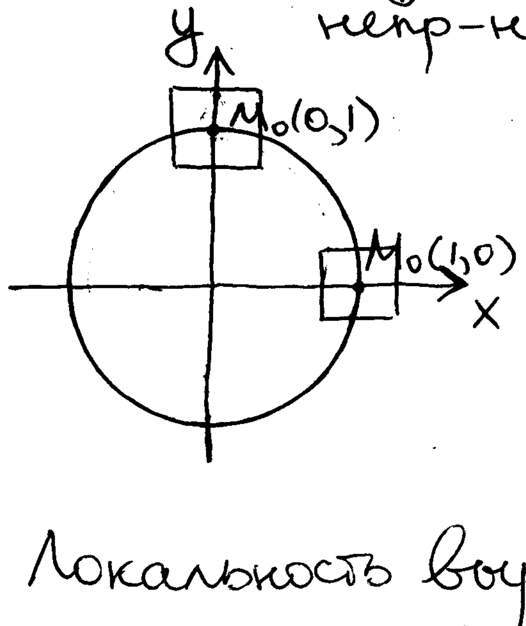
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} F<0 \text{ на инт-ле 1 } (AB) \\ F>0 \text{ на инт-ле 2 } (CD)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

(при дост-но малых AB и CD)

$\Rightarrow \exists!\, y=f(x)$, график которой $\in Q$

Зам Мы не знаем заранее размеров $2d$ и $2c$ пр-ка Q (знаем только, что такой пр-ик в принципе найдётся), поэтому теорему и называют локальной теор-й $\exists$-ия неявной ф-ии (в противовес теореме 1 – глобальной теореме сущ-ия, в которой размеры прям-ка нам заранее известны)

② $F \equiv \underbrace{x^2+y^2-1}_{\text{непр-на}} = 0 \quad (*)$



1) Рассм т. $M_0(1,0)$

$F(0,1)=0$, $F_y(0,1)=2y\big|_{y=1}=2\neq 0$

$\Rightarrow$ найдётся Q, в котором $\exists!$ решение ур-ия $(*)$

Локальность выражается в том, что существует оно только вблизи точки $x_0=0$ и единственно лишь в небольшом по высоте прям-ке Q

2) Рассм т. $M_0(1,0)$

$F(1,0)=0$, $F_y(1,0)=2y|_{y=0}=0$

$\Rightarrow$ теорема не работает

И действ-но каким бы узким мы ни выбрали прям-к Q (с центром в точке M_0), решение будет сущ-ать лишь на части этого прям-ка (слева от т. $x=x_0$). Кроме того, это реш-ие (там, где оно сущ-ет), будет заведомо не!-ым при любой (какой угодно малой) высоте прям-ка Q

Зам Утв-ия теорем 1 и 2 носят исключительно достаточный характер

③ $\underbrace{y^3-x^3}_{F}=0$ $(*)$

$F(0,0)=0$ $F_y(0,0)=0$

Но $\exists!$ $y=f(x)=x$ – реш-ие ур-ия $(*)$

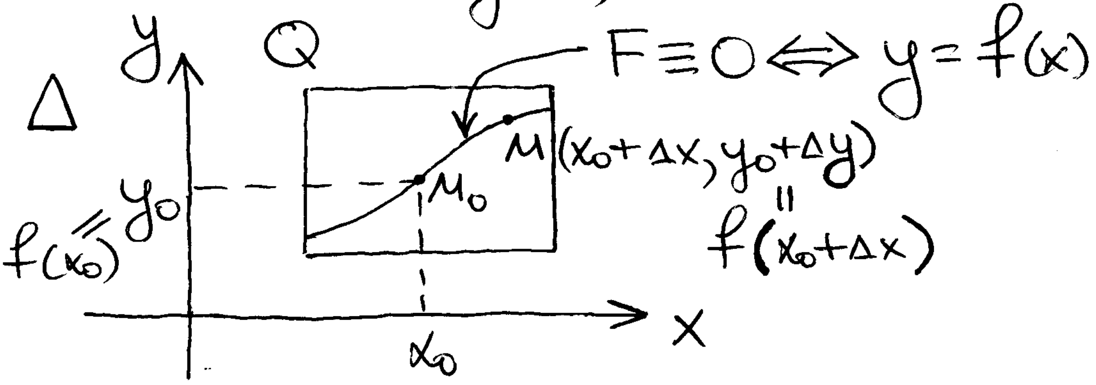
$F(x,y)=0$ $(*)$ (опять обращаемся к ур-ию общего вида)

Теор 2+ Пусть выполнены усл-ия теоремы 2 + $F(x,y)$ диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$

$\Rightarrow$ 1) неявная ф-ия $y=f(x)$ диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$

2) $f'(x_0) = -\dfrac{F_x(x_0, f(x_0))}{F_y(x_0, f(x_0))}$

Δ



$\Delta F\big|_{M_0} = \underbrace{F(M)}_{=0} - \underbrace{F(M_0)}_{=0} = 0$

С другой стороны, т.к. $f(x)$ диф-ма в т. M_0, то

$\underbrace{\Delta F\big|_{M_0}}_{=0} = F_x(x_0,y_0)\Delta x + F_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{F_x(x_0,y_0) + \alpha_1 \to 0}{F_y(x_0,y_0) + \alpha_2 \to 0}$ (считаем $\Delta x \neq 0$)

Напомню, что мы рассм-ем y как зависимую переменную: $y = y(x) = f(x)$, причём т.к. $y(x)$ непр в т. x_0, то $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ (разностная форма усл-ия непр-ти)

Тогда $\alpha_i(\Delta x, \Delta y) = \alpha_i(\Delta x, \Delta y(\Delta x)) \equiv \tilde{\alpha}_i(\Delta x)$ и

можно сразу $= \alpha_i(0, \Delta y(0)) = \alpha_i(0,0) = 0$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \tilde{\alpha}_i(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha_i(\Delta x, \Delta y(\Delta x)) =$ в силу непр α_i

$= \alpha_i(\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{=0}, \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y(\Delta x)}_{=0}) = \alpha_i(0,0) = 0$

Итак,

$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$

~~$\neq 0$ при $\Delta x \neq 0$~~

(и естественно они $= 0$ при $\Delta x = 0$)

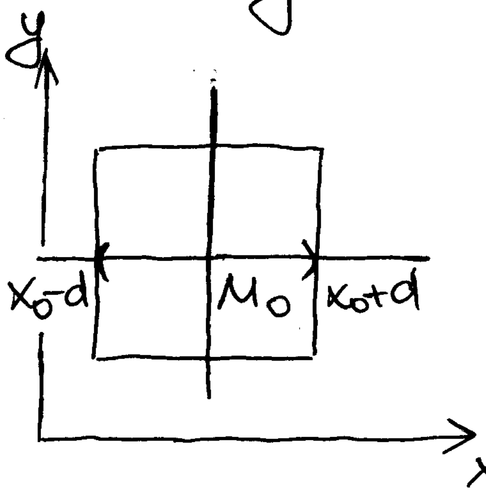
В итоге приходим к выводу, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \text{ при } \Delta x \to 0 \text{ чтд}$$

~~Зам Если заранее изв-но, что неявная ф-ия диф-ма~~ Выражение для произв-ой (без док-ва её $\exists$-ия) можно получить проще

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

$$F_x + F_y \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad (\mathrm{I})$$



При этом, если ф-ия F диф-ма во всём пр-ке Q (а не только в т. M_0), то формула (I) работает на всём инт-ле (x_0-d, x_0+d) (а не только в точке x_0)