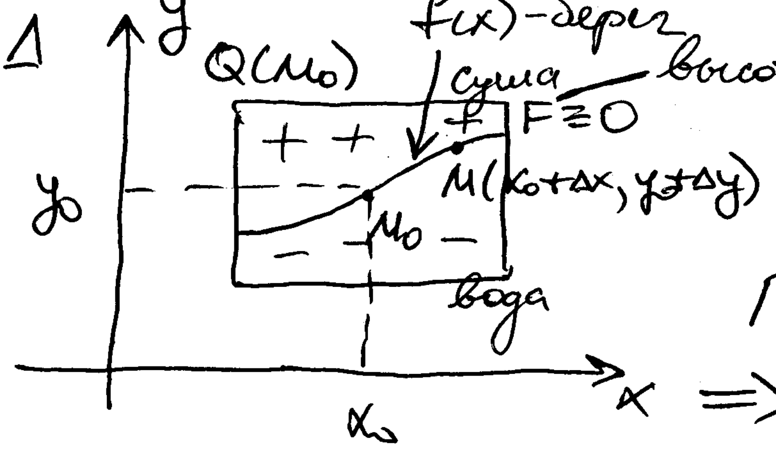
Как видно у рис. $\nexists Q^{(M_0)}$ в кот $(*)$ задавало бы НФ $f(x)$ ← К пред-му конспекту

$(*): F(x,y)=0$

Теор 2+ Пусть вып-нет усл теор 2 и пусть $F(x,y)$ диф в т. $M_0(x_0,y_0)$. Тогда НФ $y=f(x)$ диф в т. x_0 и $f'(x_0) = -\dfrac{F_x(x_0,f(x_0))}{F_y(x_0,f(x_0))}$



$f(x_0) \equiv y_0$ лишнее

$f(x_0+\Delta x) \equiv y_0+\Delta y$

Пусть $M \in$ графику $f(x)$ $\Rightarrow \Delta F\big|_{M_0} = \underset{0}{F(M)} - \underset{0}{F(M_0)} = 0$

С другой стороны, т.к. F диф в т. M_0, то

$$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{\Delta F}}\Big|_{M_0} = F_x(x_0,y_0)\underline{\Delta x} + F_y(x_0,y_0)\underset{\neq 0}{\Delta y}\Big|_{x_0} + \alpha_1 \underline{\Delta x} + \alpha_2 \underset{\neq 0}{\Delta y}\Big|_{x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x_0} = -\frac{F_x(x_0,y_0)+\alpha_1}{F_y(x_0,y_0)+\alpha_2}$$

Нап, что по теор 2 $y=f(x)$ непр в т. x_0

$\Rightarrow \Delta y(\Delta x)\big|_{x_0} \to 0,\ \Delta x \to 0$ (равн форма усл непр) не нужно!

$\Rightarrow \alpha_2(\underset{0}{\Delta x}, \underset{0}{\Delta y(\Delta x)}) \to 0,\ \Delta x \to 0$

$+\alpha_2(0,0)=0$

Т.о. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x_0} = -\dfrac{F_x(x_0,f(x_0))}{F_y(x_0,f(x_0))} \equiv f'(x_0)$ Δ

$\neq 0$ по усл 3) теор 2

~~Зам Если $F(x,y)$ диф (Δ-во ан-но) в $G(M_0) \supset Q(M_0)$, то $f(x)$ диф на (x_0-d, x_0+d). При этом ф-лу для $f'(x)$ (без Δ-ва её ∃-ия) можно получить сл-м обр-м!~~

~~$F(x, f(x)) \equiv 0 \;\Big|\; \frac{d}{dx}$~~

~~$F_x + F_y \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$~~

Не рассказывать

---

(3) $x+y=\sin xy$, $y'(0)=?$

Нап, что по теор 1 (см з-чу 1)

в $Q=(-1,+1)\times[-2,+2]$ ∃! НФ $y(x)$

Зам, что при $x=0 \Rightarrow y=0$, т.е. $y(0)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_0(0,0) \in$ графику $y(x)$

Легко убедиться, ~~в том~~ что в т. M_0 работает теор 2+ (сам-но) $\Rightarrow \exists\, y'(0)$

$$1+y' = (\cos xy)(y+xy')$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1-y\cos xy}{1-x\cos xy} \Rightarrow \boxed{y'(0) = -\frac{1-0\cdot\cos 0}{1-0\cdot\cos 0} = -1}$$

Зад-ие ~~Обобщить~~ сформ-ть теор 2+ (без Δ-ва) для ~~на~~ случая ~~случай~~ НФ ~~двух~~ n-х пер-х:

$F(x_1,x_2,y)=0 \Rightarrow$ НФ $y=f(x_1,x_2)$

~~которое~~ (должно задавать)

§2 Неявные ф-ии, опр-ые системой ур-ий

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Реш-ие с-мы (*)

$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \end{cases}$ наз сов-тью НФ или неявной вектор-ф-ей ~~(НВФ)~~ НВФ $\{y_1, y_2\} = \{f_1(x), f_2(x)\}$

Опр $\|F_y\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$ – м-ца Якоби вектор-ф-ии $F = \{F_1, F_2\}$ по вект перем $y = \{y_1, y_2\}$

Опр $\det \|F_y\| \equiv \frac{DF}{Dy} = \frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}$

– опр-ль Якоби или якобиан F по y

Теор 3 (о лок-м $\exists$-ии и диф-ти НВФ). Пусть:

1) F_1, F_2 диф в окр $G(M_0)$ т. $M_0(x^0, y_1^0, y_2^0)$

2) Все $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ непр в т. M_0

3) $F_1(M_0) = F_2(M_0) = 0$, $\left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}\right|_{M_0} \neq 0$

Тогда: парал-д

1) $\exists\, Q = (x^0 - d, x^0 + d) \times [y_1^0 - c_1, y_1^0 + c_1] \times [y_2^0 - c_2, y_2^0 + c_2]$, в кот с-ма (*) задаёт ! НВФ $\{y_1, y_2\} = \{f_1(x), f_2(x)\}$

2) $f_1(x), f_2(x)$ диф на $(x^0 - d, x^0 + d)$ $\square$

Δ Мы знаем, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0 \Rightarrow \text{одна из ЧП} \neq 0$$

Пусть для опр $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(M_0) \neq 0$

Рассм ур-ие $F_2(x, y_1, y_2) = 0$ как ур-ие отн y_2
x, y_1 — нв (незав)?

Из того, что:

1) F_2 дифф в $G(M_0)$
2) $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}$ непр в т. M_0
3) $F_2(M_0) = 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(M_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ (по теор 2+ для НФ 2-х пер-х):

1) $\exists \tilde{Q} = \overbrace{(x^0 - \tilde{d}, x^0 + \tilde{d}) \times (y_1^0 - \tilde{c}_1, y_1^0 + \tilde{c}_1)}^{\equiv \tilde{G}(\tilde{M}_0)} \times [y_2^0 - c_2, y_2^0 + c_2] \subset$
$\subset G(M_0)$, в кот ур-ие $F_2 = 0$ задаёт ! НФ
$y_2 = f(x, y_1)$

2) $f(x, y_1)$ дифф в $\tilde{G}(\tilde{M}_0)$ — прям-ой окр т. $\tilde{M}_0(x^0, y_1^0)$

Зсем, т.к. $F_2(M_0) = F_2(x^0, y_1^0, y_2^0) \overset{?}{=} 0$ и
$F_2(x^0, y_1^0, f(x^0, y_1^0)) = 0$, то ~~$f(\tilde{M}_0) = f(x^0$~~
$f(\tilde{M}_0) = f(x^0, y_1^0) = y_2^0$ (в силу !-ти f)

Найдём $\frac{\partial f}{\partial y_1}(\tilde{M}_0)$. **10.5**

$F_2(x, y_1, \underbrace{f(x, y_1)}_{y_2}) \equiv 0 \Big\} \frac{d}{dy_1} \left(\frac{D}{Dy_1}\right)$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y_1}(\tilde{M}_0) = -\frac{F_{2y_1}(M_0)}{\underset{0\neq}{F_{2y_2}(M_0)}} \quad (1)$$

Подставим $y_2 = f(x, y_1)$ в ур-ие $F_1 = 0$:

$$F_1(x, y_1, f(x, y_1)) \equiv g(x, y_1) = 0 \quad (2)$$

и рассм его как ур-ие отн y_1

Из того, что:

1) g диф в $\tilde{U}(\tilde{M}_0)$ (по теор о диф сл-й ф-ии)

2) $\frac{\partial g}{\partial y_1} \overset{(2)}{=} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial f}{\partial y_1} \overset{(1)}{=} F_{1y_1} + F_{1y_2}\left(-\frac{F_{2y_1}}{F_{2y_2}}\right) =$

$= \frac{1}{F_{2y_2}}(F_{1y_1}F_{2y_2} - F_{1y_2}F_{2y_1}) = \frac{1}{F_{2y_2}}\begin{vmatrix} F_{1y_1} & F_{1y_2} \\ F_{2y_1} & F_{2y_2} \end{vmatrix}$

– непр в т. $\tilde{M}_0(x^0, y_1^0)$, т.к. $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y_1, f(x, y_1))$ непр в т. $\tilde{M}_0$ (по теор о непр сл-й ф-ии)

3) $g(\tilde{M}_0) = g(x^0, y_1^0) \overset{(2)}{=} F_1(x^0, y_1^0, \underbrace{f(x^0, y_1^0)}_{=y_2^0}) \equiv 0$, $F_1(M_0)=0$

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}(\tilde{M}_0) = \frac{1}{\underset{0\neq}{F_{2y_2}(M_0)}} \cdot \frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}\Big|_{M_0} \neq 0$$

~~100~~

по теор 2+ (для НФ 1-й пер-й) $\Rightarrow$:

1) $\exists$ прям $P = (x^0 - d, x^0 + d) \times [y_1^0 - c_1, y_1^0 + c_1] \subset \tilde{G}(\tilde{M}_0)$, в кот ур-ие $g = 0$ задает ! НФ $y_1 = f_1(x)$

2) $f_1(x)$ дифф на $(x^0 - d, x^0 + d)$

Но тогда и $y_2 = f(x, y_1) = f(x, f_1(x)) \equiv f_2(x)$ ~~тоже~~ дифф (по теор о диф сл-й ф-ии) на $(x^0 - d, x^0 + d)$. Исп, что ~~и при~~ этом $y_2 \in [y_2^0 - c_2, y_2^0 + c_2]$

Т.о. пол-ся, что

1) $\exists Q = \underbrace{(x^0 - d, x^0 + d) \times [y_1^0 - c_1, y_1^0 + c_1]}_{P \subset \tilde{G}(\tilde{M}_0)} \times [y_2^0 - c_2, y_2^0 + c_2] \subset$

можно сразу

$\subset \tilde{G}(\tilde{M}_0) \times [y_2^0 - c_2, y_2^0 + c_2] \subset G(M_0)$, в кот с-ма (*) задаёт ! НВФ $\{y_1, y_2\} = \{f_1(x), f_2(x)\}$

2) $f_1(x), f_2(x)$ дифф на $(x^0 - d, x^0 + d)$ $\blacktriangle$

Зам О выч-ии ЧП НВФ

$$\begin{cases} F_1(x, f_1(x), f_2(x)) \equiv 0 \\ F_2(x, f_1(x), f_2(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{F_{1x}} + \boxed{F_{1y_1}} f_{1x} + \boxed{F_{1y_2}} f_{2x} = 0 - F_{1x} \\ \cancel{F_{2x}} + \boxed{F_{2y_1}} f_{1x} + \boxed{F_{2y_2}} f_{2x} = 0 - F_{2x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{1y_1} & F_{1y_2} \\ F_{2y_1} & F_{2y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ (по формулам Крамера)

$$f_{1x} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad f_{2x} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

§3 Зависимость ф-ий

1) $\begin{cases} u_1 = 2x + 2y \\ u_2 = 4x + 4y \end{cases}$ $(x, y) \in E^2$

$u_1 = \frac{u_2}{2} \equiv \varphi_1(u_2)$, $u_2 = 2u_1 \equiv \varphi_2(u_1)$

(принцип-но, что φ_2 не зависит от x и y)

2) $\begin{cases} u_1 = x - y \\ u_2 = x + y \end{cases}$ $(x, y) \in E^2$

Док-м, что $u_1 \neq \varphi(u_2)$

Δ Доп, что $u_1 = \varphi(u_2)$, т.е., что $x - y = \varphi(x+y)$

1-й способ: $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$

$\begin{cases} +1 = \varphi'(x+y) \cdot 1 \\ -1 = \varphi'(x+y) \cdot 1 \end{cases}$ > против-ие

2-й способ: при $x = y = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$
при $x = +1, y = -1 \Rightarrow \varphi(0) = 2$ > против-ие

$\Rightarrow u_1 \neq \varphi(u_2)$ $\blacktriangle$

Пусть $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$ $(x_1, x_2, x_3) \in D$ - обл E^4