Лекция 11

(2) $x+y=\sin xy$

$\Rightarrow y=f(x),\ x\in(-1,+1)$ (см з-ту 1)

$f'(x)=?$

$$1+y'=(\cos xy)(y+xy')$$

$$y'=-\frac{1-y\cos xy}{1-x\cos xy}$$

Рассм т. $M_0(0,0)\in$-ую графику $f(x)$

$$y(0)=0\Rightarrow y'(0)=-1$$

Диф-уя выр-ие для $y'(x)$ (как сложную ф-ю x), находим вторую и далее все последующие произв-ые

Задание. Дать опр-ие неявной ф-ии многих пер-ых и обобщить усл-ия (без док-в) теорем 1, 2 и 2' на случай таких ф-й

$$F(x_1,\ldots,x_n,y)=0\Rightarrow y=f(x_1,\ldots,x_n)$$

Напр, при выполнении усл-й указанных теорем

§2 Неявные ф-ии, опр-ые системой ур-ий

$$(*)\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,y_2) \\ F_2(x_1,\dots,x_n,y_1,y_2) \end{cases}$$

ф-ий столько, сколько ур-ий

$n\in\mathbb{N}$

система ур-й неявных ф-ий

Решение этой с-мы

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\dots,x_n) \\ y_2=f_2(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

иногда пишут $\vec{f}$

наз-ют совокупностью неявных ф-ий или неявной вектор ф-ей $y=\{y_1,y_2\}=\{f_1(-\text{"}-),\ f_2(-\text{"}-)\}\equiv f(x_1,\dots,x_n)$ опр-емой сист-й (*)

Введём в рассм-ие вектор ф-ю $F\equiv\{F_1,F_2\}$, ~~и~~ пер-ую $y\equiv\{y_1,y_2\}$ и матрицу Якоби

$$\|F_y\|\equiv\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

– м-ца Якоби вектор-ф-ии F пер-м y_1 и y_2 (или просто по векторной перем-й $y=\{y_1,y_2\}$)

Образно выражаясь, м-ца Якоби – это произв-ая вектор ф-ии F по векторному арг-ту y

функциональный опр-ль

Опр $\det\|F_y\|\equiv\frac{DF}{Dy}=\frac{D(F_1,F_2)}{D(y_1,y_2)}\equiv\Delta$

– опр-ль Якоби или якобиан ф-ий F_1, F_2 по пер-м y_1, y_2 (F по y) 11.3

с маленькой буквы!

Рассм с-му (*) при $n=1$

$$(*)\ \begin{cases} F_1(x, y_1, y_2) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

Теор 3 (обобщ теор 2+) Пусть

1) ф-ии F_1 и F_2 диф-мы в нек окр ω т. $M_0(x^0, y_1^0, y_2^0)$

2) $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2)$ непр в т. M_0

заведомо $\exists$ в ω (т.к. диф-мы)

3) $F_1(M_0) = F_2(M_0) = 0$, $\left.\frac{DF}{Dy}\right|_{M_0} \neq 0$

Тогда

1) $\exists$ параллелепипед $Q = (x^0 - d, x^0 + d) \times [y_1^0 - c_1, y_1^0 + c_1] \times [y_2^0 - c_2, y_2^0 + c_2]$, в котором с-ма (*) опр-ет !-ую неявную вектор-ф-ию $\{y_1, y_2\} = \{f_1(x), f_2(x)\}$

2) $f_1(x)$, $f_2(x)$ диф-мы на $(x^0 - d, x^0 + d)$

Δ Мы знаем, что

$$\left.\frac{DF}{Dy}\right|_{M_0} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(M_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(M_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

11.4

$\Rightarrow$ хотя бы одна из $\frac{\partial F_2}{\partial y_j}(M_0) \neq 0$

Пусть для опр-ти $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(M_0) \neq 0$

Рассм 2-ое ур-ие (*)

(1) $F_2(\underbrace{x}_{\text{изв}}, \underbrace{y_1}_{\text{изв}}, \underset{?}{y_2}) = 0$ как ур-ие отн-но y_2

Из того, что

1) F_2 диф в $\omega(M_0)$

2) $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}$ непр в т. M_0

3) $F_2(M_0) = 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(M_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ (по теор 2+ для неявной ф-ии 2-х перем-ых)

1) сущ-ет парал-д

$\tilde{Q} = (x^0 - \tilde{\delta}, x^0 + \tilde{\delta}) \times (y_1^0 - \tilde{c}_1, y_1^0 + \tilde{c}_1) \times [y_2^0 - c_2, y_2^0 + c_2] \subset \omega(M_0)$,

в котором ур-ие (1) опр-ет !-ую неявную ф-ию

(2) $y_2 = f(x, y_1)$, при этом ест-но $y_2^0 = f(x^0, y_1^0)$ (т.к. $F(x^0, y_1^0, y_2^0) = 0$ по усл 3) и $F(x^0, y_1^0, f(x^0, y_1^0)) = 0$ по опр фии f)

2) $f(x, y_1)$ – диф-ма ~~ая~~ в прям-ке $(x^0 - \tilde{\delta}, x^0 + \tilde{\delta}) \times (y_1^0 - \tilde{c}_1, \tilde{y}_1 + \tilde{c}_1) \equiv \tilde{\omega}(\tilde{M}_0)$ прям-ая окр-ть т. $\tilde{M}_0(x^0, y_1^0)$

Получим выр-ие для $\frac{\partial f}{\partial y_1}$

$F_2(x, y_1, \overbrace{f(x, y_1)}^{y_2}) \equiv 0$

$\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{\frac{\partial F_2}{\partial y_1}}{\frac{\partial F_2}{\partial y_2}} \quad (3)$$

Подставим (2) в первое ур-ие (*):

$$F_1(x, y_1, f(x, y_1)) \equiv g(x, y_1) = 0 \qquad (4)$$

Рассм это ур-ие как ур-ие отн-но y_1. Здесь также выполнены все усл-ия теор-мы 2+:

1) g диф в $\tilde{\omega}(\tilde{M}_0)$ (по теор и диф-ти сл-й ф-ии)

2) т.к. $\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(x, y_1, \overbrace{f(x, y_1)}^{y_2})$ ~~и $F_{y_2}(\ldots)$~~ непр-ны в т. $\tilde{M}_0(x^0, y_1^0)$ (по теор о непр-ти сложной ф-ии), то

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} \overset{(3)}{=} (F_1)_{y_1} - (F_1)_{y_2} \frac{(F_2)_{y_1}}{(F_2)_{y_2}} =$$

$$= \frac{1}{(F_2)_{y_2}} \left[(F_1)_{y_1} (F_2)_{y_2} - (F_1)_{y_2} (F_2)_{y_1} \right]$$

– также непр-на в т. $\tilde{M}_0$

3) $g(\tilde{M}_0) = g(x^0, y_1^0) = F_1(x^0, y_1^0, \overbrace{f(x^0, y_1^0)}^{=y_2^0}) = F_1(M_0) = 0$

$$g_{y_1}(\tilde{M}_0) = \frac{1}{F_{2y_2}(M_0)} \cdot \frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}\Big|_{M_0} \neq 0$$

а значит (по теор 2+):

1) сущ-ет прям-к $(x^0 - d, x^0 + d) \times [y_1^0 - c_1, y_1^0 + c_1]$

$P = (x^0 - d, x^0 + d) \times [y_1^0 - c_1, y_1^0 + c_1] \subset \tilde{\omega}(\tilde{M}_0)$,

в котором ур-ие (4) опр-ет !-ую неявную ф-цию $y_1 = f_1(x)$

2) $f_1(x)$ диф на $(x^0 - d, x^0 + d)$

Но тогда получается, что и

$$y_2 = f(x, y_1) = f(x, f_1(x)) \equiv f_2(x)$$

диф-ма (по теор о диф сл-й ф-ции) на $(x^0 - d, x^0 + d)$

Т.о. $\exists$ парал-д

$$Q = (x^0 - d, x^0 + d) \times [y_1^0 - c_1, y_1^0 + c_1] \times [y_2^0 - c_2, y_2^0 + c_2] \subset \tilde{Q} \subset \omega(M_0),$$

в котором с-ма (*) опр-ет !-ую неявную вектор-ф-цию $\{y_1, y_2\} = \{f_1(x), f_2(x)\}$, причём $f_1(x)$ и $f_2(x)$ диф на $(x^0 - d, x^0 + d)$ $\triangle$

Вычисление произв-ых вектор-ф-ции

$$\left.\begin{cases} F_1(x, f_1(x), f_2(x)) \equiv 0 \\ F_2(x, f_1(x), f_2(x)) \equiv 0 \end{cases}\right\} \frac{d}{dx}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\underbrace{\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}}_{\text{неизв-ые ф-ции}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{F_{1y_1}} f_{1x} + \boxed{F_{1y_2}} f_{2x} = -F_{1x} \\ \boxed{F_{2y_1}} f_{1x} + \boxed{F_{2y_2}} f_{2x} = -F_{2x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{1y_1} & F_{1y_2} \\ F_{2y_1} & F_{2y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \leftarrow \text{якобиан}$$

$\Rightarrow$ Работают ф-лы Крамера:

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{df_2}{dx} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Зам Для старших произв-ых получается лин-ая с-ма с тем же Δ

§3 Зависимость ф-ий

1. $u_1(x,y) = xy$, $u_2(x,y) = x$, $u_3(x,y) = y$ ~~$x,y \in E^2$~~

Мы видим, что

$\forall x, y \in E^2 \Rightarrow u_1 = u_2 \cdot u_3 \equiv \Phi(u_2, u_3)$,

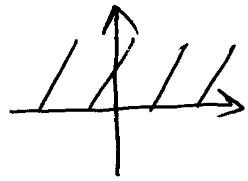
~~т.е., что~~ а значит u_1 зависит от u_2 и u_3 на E^2 в том смысле, что, зная величины u_2 и u_3, мы можем однозначно опр-ть величину u_1

$u_2 \overset{?}{=} \Phi(u_1, u_3)$ на E^2

Зам, что ~~Н.к.~~ при $y = 0$ и $\forall x$ (а значит и при $\forall u_2$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow u_1 = u_3 = 0$. Т.о., если $u_1 = u_3 = 0$, то мы не

можем сказать чему $= u_2$

$\Rightarrow u_2 \neq \Phi(u_1, u_3)$ на E^2

Но, напр, в обл-ти $G: y>0$ 

$\Rightarrow u_2 = \frac{u_1}{u_3} = \Phi(u_1, u_3)$ в обл. G

② $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ x \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow y_2 = \Phi(y_1) = y_1^2$

Если $x \in (-\infty, 0] \equiv D_1 \Rightarrow y_1 = -\sqrt{y_2} = \Phi_1(y_2)$

$x \in [0, +\infty) \equiv D_2 \Rightarrow y_2 = +\sqrt{y_2} = \Phi_2(y_2)$

т.е. y_1 зависит от y_2 на D_1 и на D_2

Но $y_1 = \mp\sqrt{y_2} \neq \Phi(y_2)$ на $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$

③ $u_1 = 10x + 10y,\ u_2 = 2x + y,\ u_3 = x + 3y,\ x, y \in E^2$

$\Rightarrow u_1 = 4u_2 + 2u_3$ — лин-но зависит от u_2 и u_3

Проверка

$10x + 10y \equiv 4(2x+y) + 2(x+3y)$

Пусть $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \text{———} \;\; \text{"} \;\; \text{———} \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$ (*)

где $(x_1, \dots, x_m) \in D$

n может быть $<, >$ и $= m$

Опр Ф-ии $y_1, \ldots, y_n$ наз-ся зависимыми в обл-ти D, если одна из этих ф-ий зависит в D от остальных, т.е. если для какой-н ф-ии y_k спр-во

$$y_k = \Phi(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n),$$

где Φ - диф-ая ф-ия своих арг-ов. В противном случае ф-ии $y_1, \ldots, y_n$ наз-ся независ-ми в D

Зам-я 1) это рав-во понимается в $\equiv$-ом отн-но $x_1, \ldots, x_n$ смысле

2) сущ-но, что Φ не зависит от x_i (т.е. величина y_k опр-ся только величинами ост-х y_i)

~~Теор 4 (о незав-ти ф-ий) Пусть:~~

Пусть $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$

Теор 4 (о незав-ти ф-ий) Пусть:

1) f_1, f_2 диф-мы в обл-ти ω

2) $\exists$ т. $M \in \omega$, в кот якобиан ф-й f_1 и f_2 по каким-н двум перем-м $\neq 0$ ~~в нек~~

Тогда y_1 и y_2 незав-мы в ω

Δ Предполагая, что вып-но 1), покажем, напр, что

$$\text{у}\left[\exists M\in\omega: \left.\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_M \neq 0\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} y_1 \text{ и } y_2 \\ \text{незав в } \omega \end{array}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\forall M\in\omega \Rightarrow \left.\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_M = 0\right] \Leftarrow \left[\begin{array}{c} y_1 \text{ и } y_2 \text{ за-} \\ \text{висимы в } \omega \end{array}\right]$$

случай якобианов по другим перем-ым рассм-ся анал-но

Δ-ем 2-ой у$\Leftrightarrow$-ых вариантов

Итак, пусть y_1 и y_2 зависимы в ω,

напр $y_2 = \Phi(y_1)$

$\left(\Phi' \equiv \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right.$ — для обобщения на случай многих $\left.y_n\right)$ облегчения

По опр-ию зав-ти это значит, что

$$f_2(x_1,x_2,x_3) \equiv \Phi(f_1(x_1,x_2,x_3)) \text{ в } \omega$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \equiv \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \equiv \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{cases} \text{ т.е. } \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{A_1(M)} \equiv \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}}_{K(M)} \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{A_2(M)} \text{ в } \omega$$

$$\Rightarrow \frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = $$

Можно сразу сказать, что строки пропорциональны

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \det(A_1 A_2) \equiv 0 \text{ в } \omega$$

$\not\exists$

транспонируем

Вернёмся к общему случаю (*). Напомню, что

$$\| f_x(M) \| = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(M) \\ \hline \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(M) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(M) \end{bmatrix} = A(M)$$

м-ца Якоби вектор-ф-ии f (явл-ся функцион-ой м-ей $A(M)$ – матрицей ф-ий)