11.1

Опр Говорят, что ф-я y_2 зависит в обл D от ф-ии y_1, если $\exists$ такая диф ф-я Φ, что $y_2 = \Phi(y_1)$ в D, т.е., что $(f_2 = \Phi \circ f_1)$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) \equiv \Phi(f_1(x_1, x_2, x_3)) \text{ при } (x_1, x_2, x_3) \in D$$

Зам Если $y_1 = \Phi_1(y_2)$ или $y_2 = \Phi_2(y_1)$, то y_1 и y_2 – зависимы в D

Теор 4 (о незав-ти ф-ий) Пусть:

1) f_1, f_2 диф в обл D

2) $\exists$ т. $M_0 \in D$, в кот якобиан ф-й f_1, f_2 по каким-н двум пер-м $\neq 0$

$\Rightarrow$ y_1 и y_2 незав-~~мы~~ в D

Δ Пусть для опр $\left.\dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}\right|_{M_0} \neq 0$

От обратного: доп, что y_1 и y_2 зав в D, напр, $y_2 = \Phi(y_1)$. Это значит, что

$$f_2(x_1, x_2, x_3) \equiv \Phi(f_1(x_1, x_2, x_3)) \quad \Big\} \frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \equiv \Phi' \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \equiv \Phi' \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \equiv \Phi' \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \forall M \in D$$

Пусть $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$ $(x_1, x_2, x_3) \in$ обл D

11.2

$$\Rightarrow \left.\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{M_0} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{matrix}\right|_{M_0} = 0$$ (пропорц-ны)

Но $\left.\overbrace{\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}}^{\text{по усл}}\right|_{M_0} \neq 0$ – против-ие

$\Rightarrow y_1$ и y_2 незав в D $\boxtimes$

Добавим $y_3 = f_3(x_1,x_2,x_3)$ и рассм

$$\|f_x(M)\| = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} & f_{1x_3} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} & f_{2x_3} \\ f_{3x_1} & f_{3x_2} & f_{3x_3} \end{pmatrix}$$ – м-ца Якоби (функц-я м-ца)

(левый верхний минор 2×2 $\neq 0$)

Теор 5 (о завис-ти ф-ий) Пусть:

1) f_1, f_2, f_3 диф в $G(M_0)$

2) все $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непр в т. M_0

3) $\left.\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{M_0} \neq 0$ (базисный минор)

4) $\left.\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}\right|_{M} \equiv 0$ ~~$\forall M \in G(M_0)$~~ в $G(M_0)$

Тогда:

1) y_1 и y_2 незав в $G(M_0)$

2) $\exists\, \tilde{G}(M_0) \subset G(M_0)$, в кот $y_3 = \Phi(y_1,y_2)$

{Без д-ва}

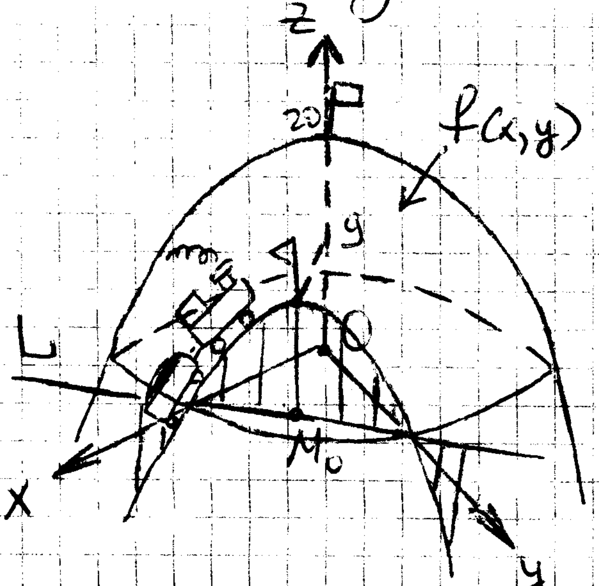
§4 Условный экстремум

Метод Лагранжа для ~~случая~~ одного условия связи

(1) $\begin{cases} z = f(x,y) \equiv 20 - x^2 - 2y^2 \leftarrow \text{иссл-я ф-я} \\ 3x + 2y = 11 \Leftrightarrow F(x,y) \equiv 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$

прямая L

ур-ие связи

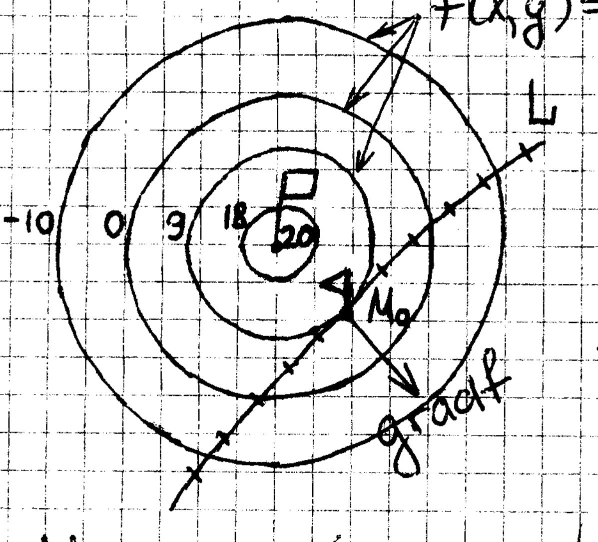


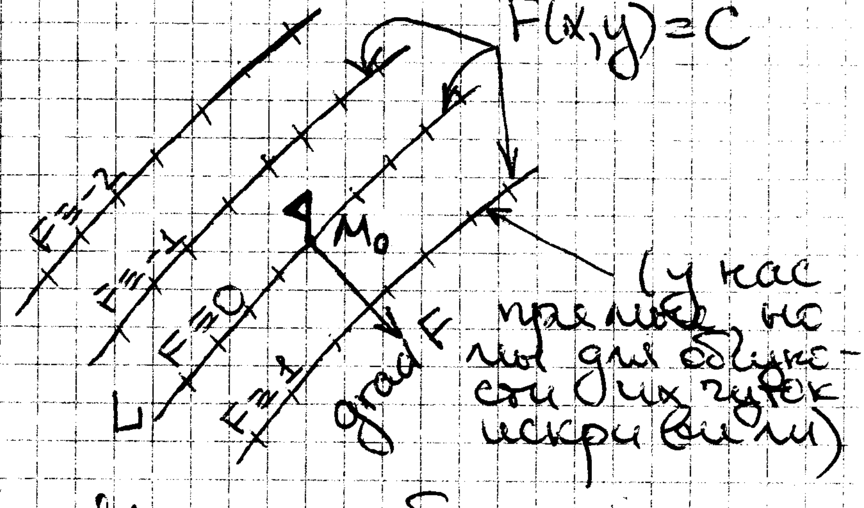
$O(0,0)$ – т. безусл (лок) max ф-ии f; $f(O) = 20$

$M_0(x_0, y_0)$ – т. усл-го (лок) max ф-ии f; $f(M_0) = 9$

max над прямой L

Зам Если убрать ур-ие связи $F = 0$, то M_0 – не т. max, т.е. M_0 – не т. безусл max





Мишень (линии уровня ф-ии $f(x,y)$) | Многоколейная железная дорога (линии уровня ф-ии $F(x,y)$).

Как видно из рис.: 1) M_0 - т. усл экстр $\Rightarrow$ 11.4

$\Rightarrow$ пр-я L касается ЛУ ф-ии $f(x,y)$ в т. M_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f\big|_{M_0} \perp L$ в т. M_0, т.к. $\operatorname{grad} f\big|_{M_0} \perp$ ЛУ $f\big|_{M_0}$

(нап, что $\operatorname{grad} f$ всегда $\perp$ ЛУ ф-ии f)

2) пр-я L - ЛУ ф-ии $F(x,y)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} F\big|_{M_0} \perp L$ в т. $M \in L$ (еще раз

нап, что $\operatorname{grad} F$ всегда $\perp$ ЛУ ф-ии F)

Из 1) + 2) $\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f\big|_{M_0} \parallel \underset{\neq \theta}{\operatorname{grad} F\big|_{M_0}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f\big|_{M_0} = \lambda_0 \operatorname{grad} F\big|_{M_0}$

Нап, что в случае безусл экстр $\operatorname{grad} f\big|_{M_0} = 0$

Опр Т-ки $M_0 \in L$, в кот в-ры $\operatorname{grad} f$ и $\operatorname{grad} F$ - ЛЗ, наз т-ми возм усл экстр ф-ии f

Т.о., из того, что M_0 - т. возм усл экстр f $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} \underbrace{(f - \lambda_0 F)}_{\equiv \mathcal{L}}\big|_{M_0} = \operatorname{grad} \mathcal{L}\big|_{M_0} =$

$= \{\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{L}_x(M_0)}}, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{L}_y(M_0)}}\} = 0$

Метод Лагранжа:

$f(x,y) \longmapsto \underset{\text{ф-я Л-жа}}{\mathcal{L}(x,y;\lambda)} = f(x,y) - \underset{\text{мн-ль Л-жа}}{\lambda} F(x,y)$

Зам, что: 1) над пр-й $L \Rightarrow F \equiv 0$,
а значит $\Phi = f + \lambda \cdot 0 \overset{\forall \lambda}{=} f \Rightarrow$
$\Rightarrow$ т-ки усл $\max \Phi \overset{\forall\lambda}{=}$ т-м усл $\max f$
2) при $\lambda = \lambda_0 \Rightarrow \Phi_x = \Phi_y = 0$ в т. M_0
в то время как $f_x, f_y \neq 0$ в т. M_0

Из 2) пол-ся, что $\exists \lambda = \lambda_0$ (его еще предстоит найти):
M_0 – т. возм безусл экстр Φ (т.е. экстр-ма ~~а не только~~
по всем напр-м), а не только возм усл
экстр, как для ф-ии f (т.е. экстр-ма
только по напр-ию пр-й L)

Зам Можно считать, что при $\lambda = \lambda_0$
$\Rightarrow \operatorname{grad} \Phi|_{M_0} = 0 \cdot \operatorname{grad} F|_{M_0} = \vec{0}$,
в то время как

$$\operatorname{grad} f|_{M_0} = \lambda_0 \operatorname{grad} F|_{M_0},$$

т.е. выходит, что переход от (иссл-я) ф-ии f
к (иссл-ю) ф-ии Φ – своего рода зануление
grad-та иссл-ой ф-ии (что одновр-но ~~можно~~ интер-
прет-ся и как превращение M_0 из т-ки
возм усл экстр в т-ку возм безусл экстр)

Найдём M_0 и д-м, что M_0 – т. усл ~~min~~ max 11.6
(I) (II)

I) $\Phi = 20 - x^2 - 2y^2 - \lambda(3x + 2y + 11)$

$$\begin{cases} \Phi_x = -2x - 3\lambda = 0 \\ \Phi_y = -4y - 2\lambda = 0 \\ \underbrace{3x + 2y - 11}_{= \Phi_\lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2}\lambda \\ y = -\frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{9}{2}\lambda - \frac{2}{2}\lambda - 11 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_0(3, 1)$ – т. возм безусл экстр $\Phi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т. возм усл экстр Φ и f

II) Проверка дост усл-й экстр. Рассм

$$d\Phi|_M = \Phi_x dx + \Phi_y dy = (-2x - 3\lambda)dx + (-4y - 2\lambda)dy \quad (1)$$

и найдём $d^2\Phi$

Зам, что x и y: $3x + 2y - 11 = 0$

$\Rightarrow$ либо $x = x(y)$, либо $y = y(x)$

Пусть $y = y(x)$. Тогда

$$\Phi(x, y; \underset{-2}{\overset{\shortparallel}{\lambda}}) \equiv \Phi(x, y) = \Phi(x, y(x)) \equiv \tilde{\Phi}(x)$$

и при этом: $M_0(\overset{3}{\overset{\shortparallel}{x_0}}, \overset{1}{\overset{\shortparallel}{y_0}})$ – т. усл экстр $\Phi(x, y) \Leftrightarrow$
(по опр усл экстр) $\Leftrightarrow x_0$ – т. безусл экстр $\tilde{\Phi}(x)$

Т.о. нас интересует $d^2[\Phi$ как ф-ии $x]$. Учитывая, что $d^2x = 0$, имеем

$$(2): d^2\Phi|_{x_0} = d[(1)]_{x_0} = -2dx^2 - 4dy^2|_{x_0} + \underbrace{\cancel{(-4y_0 - 2\lambda_0)}}_{\Phi_y(M_0) = 0} d^2y|_{x_0}$$

80